

Porovnanie „concept image” pojmu funkcia medzi žiakmi stredných škôl

Comparison of concept image of “function” between secondary school students

Enikő Schnürerová, Veronika Hubeňáková

Abstract

The paper deals with the comparison of conceptual images of function among secondary school students. The main purpose is to compare the understanding of the concept of function between students of the business academy and secondary grammar schools with different specializations. The article defines the terms "concept image" and "concept definition", describes the methodology based on the evaluation of the questionnaire and the most important results of the analysis of the obtained data. As part of the analysis, the "concept image" of function of mathematics teachers and their students is also compared.

Keywords: Concept image. Concept definition. Function.

Úvod

Rozpoznávaním vzorov a vstupno-výstupných vzťahov sa žiaci stretávajú už na základnej škole. S pojmom „funkcia“ prichádzajú žiaci do kontaktu v deviatom ročníku pri zavádzaní lineárnej funkcie. Funkciám ako takým je venovaná väčšia pozornosť na stredných školách, kde žiaci skúmajú rôzne triedy funkcií, vrátane ich reprezentácií a spôsobov riešenia. Funkčné myslenie je však možné (a potrebné) rozvíjať od najskorších ročníkov školy, teda ešte predtým než je funkcia definovaná.

Autori Tall a Vinner (1981) sa zaoberali vzťahom medzi definíciou daného pojmu a obrazom, ktorý o danom pojme konkrétny človek má. Tvrdia, že mnohé pojmy používame bez toho, aby sme ich mali formálne definované, spoznávame ich skúsenosťou. V procese definovania pojmy získavajú názov alebo symbol, ktoré uľahčujú komunikáciu či manipuláciu s ním (Tall, Vinner 1981). Rozlišujú pojmy „concept image“ a „concept definition“. Pojem „**concept image**“ používame na opis celkovej kognitívnej štruktúry spojenej s pojmom. „Concept image“ zahŕňa všetky mentálne obrazy a súvisiace vlastnosti a procesy. „Concept image“ sa vyvíja v priebehu rokov, mení sa skúsenosťami a dospievaním. Rôzne podnety aktivujú rôzne časti „concept image“. Pojem „**concept definition**“ predstavuje formu slov, ktorými jedinec špecifikuje určitý pojem. Napríklad, ak počujeme slovo „funkcia“, môže niekomu napadnúť napríklad graf funkcie či výraz $y=f(x)$ (Vinner, 1991), ak by sme ho požiadali o *definíciu*, mohol by uviesť, že ide o zobrazenie, ktoré každému x z definičného oboru, priradí práve jedno y z oboru hodnôt.

Koncept funkcie prešiel dlhým vývojom a objavili sa rôzne pohľady na funkciu.

Pittalis a kol. (2020) uvádza 4 základné pohľady:

- Pohľad priradenia vstupu a výstupu – funkcia ako vstupno-výstupný stroj. Skúmanie toho, ako vstupná hodnota ovplyvňuje výstupnú hodnotu, aké pravidlo určuje výstup na základe vstupu.
- Dynamický proces kovariácie – zdôraznenie kovariácie závislej a nezávislej premennej.
- Pohľad na korešpondenčný vzťah – pochopenie vzťahu medzi závislou a nezávislou premennou vo všeobecnosti. Môže viesť k definícii funkcie ako množiny usporiadaných dvojíc.
- Matematický objekt – funkcia ako objekt s vlastnými reprezentáciami a vlastnosťami, ktorý možno porovnávať s inými matematickými objektmi.

Funkčnému mysleniu je venovaná čoraz väčšia pozornosť. Táto skutočnosť nás motivovala skúmať „concept image“ pojmu funkcia žiakov stredných škôl. V rámci výskumu sme sa snažili zistiť a porovnať šírku „concept image“ žiakov jednotlivých škôl aj „concept image“ žiakov a ich učiteľov.

Metodológia výskumu

Výskum bol realizovaný na rôznych typoch stredných škôl. Dáta boli zozbierané od 64 žiakov a 4 učiteľov. Do výskumu sme zahrnuli žiakov končiacich ročníkov obchodnej akadémie (OAKE), bilingválneho gymnázia (GYMES) a 8-ročného gymnázia (GYMTV). V nasledujúcej tabuľke (Tab. 1) uvádzame počty žiakov z jednotlivých škôl.

Tab. 1 Počet respondentov

	Typ školy		
	OAKE	GYMES	GYMTV
Počet študentov	37	10	17
Počet učiteľov	1	1	2
Spolu	38	11	19

Výskumný nástroj bol inšpirovaný výskumným nástrojom v štúdiu Nagle a kol. (2013) zameranej na pojem smernica. Autori vyvinuli 5-položkový dotazník zisťujúci, čo je smernice, akými spôsobmi môže byť reprezentovaná, ako a kde sa používa a nakoniec mali respondenti uviesť tri príklady smernice. Náš výskumný nástroj obsahoval nasledujúce 4 položky:

- Čo je to funkcia?
- Uveďte všetky spôsoby, ktorými môže byť funkcia reprezentovaná.
- Kedy a ako môžeme použiť funkciu?
- Uveďte tri rôzne príklady, ktorými by ste „ilustrovali“ pojem funkcia.

Keďže sme chceli zistiť „concept image“ žiakov, zámerne sme do dotazníka vložili otvorené otázky, ktoré umožňujú širokú škálu odpovedí. Zber dát sme realizovali prezenčnou formou. Žiakom sme predložili dotazník v papierovej forme a na jeho vyplnenie mali dostupný čas 10 minút. Dáta sme zbierali aj od štyroch učiteľov vyučujúcich žiakov zo skúmaných škôl. Učitelia vyplňali rovnaký dotazník a mali dostupný rovnaký čas. Respondentov sme oboznámili s témou výskumu a požiadali sme ich o samostatné vyplnenie dotazníka. Z odpovedí 64 žiakov na štyri položky dotazníka vzniklo 256 jednotiek na kódovanie a analýzu. Kódovanie prebiehalo v programe Microsoft Excel pomocou núl a jednotiek. Jednotka pre kategóriu, ktorá sa nachádza v odpovedi a nulu, ak sme kategóriu v odpovedi

nešli. V jednej odpovedi mohlo byť identifikovaných aj viacero kategórií. Kategórie, do ktorých sme tieto jednotky kódovali, sme čerpali z výskumu Vinnera a Dreyfusa z roku 1989, ktorý popisuje šesť definícií funkcie, a to:

- korešpondencia – funkcia je korešpondencia medzi dvomi množinami, v ktorých je každému prvku jednej množiny priradený práve jeden prvok druhej množiny;
- vzťah závislosti – funkcia je vzťah závislosti medzi dvomi premennými;
- pravidlo – funkcia je pravidlo, od pravidla očakávame pravidelnosť, na rozdiel od korešpondencie, ktorá môže byť „ľubovoľná“;
- operácia – funkcia je operácia alebo manipulácia (aplikáciou algebrických operácií);
- predpis – funkcia je predpis, algebrický výraz alebo rovnica;
- reprezentácia – funkcia je nezmyselným spôsobom identifikovaná s grafickou alebo symbolickou reprezentáciou.

Okrem týchto definícií funkcie sme uvažovali aj 4 pohľady na funkcie, čím sme pridali ďalšie kategórie vstup-výstup, kovariácia a matematický objekt. Pre korektnosť boli dáta autorkami článku kódované nezávisle od seba, rozpory boli odkomunikované a zjednotené. Keďže sa objavili odpovede, ktoré nezapadali do ani jednej kategórie, vytvorili sme nové kategórie – množina bodov, zobrazenie, priradenie, iná odpoveď, mimo matematiky, v matematiky, štatistika, predikcia. Zaviedli sme aj kategóriu „nerelevantná odpoveď“ pre nezmyselné odpovede. Princíp kódovania uvádzame v Tab. 2.

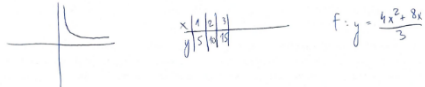
Tab. 2 Príklady kódovania odpovedí

Kategória	Odpovede	Položka dotazníka
Vstup-výstup	Krabička, do ktorej vhodíte niečo a spraví vám z toho niečo iné	4
Korešpondencia	Každému x je priradené práve jedno y	1
Kovariácia	Vyjadruje, ako sa hodnota y mení vo vzťahu s hodnotou x	1
Vzťah závislosti	Závislosť medzi dvomi hodnotami	1
Matematický objekt	Funkcia reprezentuje vzťah závislej premennej y od nezávislej premennej x	1
	Predpis, ktorý jednoznačne priradí prvku z množiny premenných (definičný obor) prvok alebo prvky z množiny hodnôt (oboru hodnôt)	1
Množina bodov	Množina bodov, kde každé x má najviac jedno y	1
Priradenie	Výška v cm priradená jednotlivým žiakom triedy	4
Zobrazenie	Zobrazenie pomocou grafov	1
Vzorec/rovnica/predpis	Súbor hodnôt definovaný matematickým predpisom	1
	Zakreslenie určitej rovnice pomocou grafov	1
	$f(x): y = 2x - 5$	4
Graf	Graficky, rovnica	2
Tabuľka	Grafom, predpisom, bodmi, tabuľkou	2

Slovná reprezentácia	Rovnicou, grafom, tabuľkou, slovami	2
Štatistika	Vyhodnocovanie štatistických údajov	3
Predikcia	Predpokladanie vývoja situácií	3
	Na predpovedanie príjmov firmy	3
V matematike	Pri riešení sústav rovníc	3
Mimo matematiky	Vyobrazenie krivky dopytu	3
Iná odpoveď	Grafom, rovnicou, parametrickým zápisom, určitým počtom bodov patriacim funkcii (lineárna- dvoma, kvadratická-tromi)	2
Nerelevantná odpoveď	Vzťah medzi 2 objektami	1
	Funkcia má vlastnosť, že každému x patrí definičný obor	1

Identifikovanie rôznych kategórií v odpovediach v jednotlivých položkách dotazníka uvádzame v Tab. 3.

Tab. 3 Odpovede s viacerými kategóriami

Položka dotazníka	Odpoveď	Kategórie
1	Predpis, ktorý jednoznačne priradí prvku z množiny premenných (definičný obor) prvok alebo prvky z množiny hodnôt (oboru hodnôt)	Korešpondencia Vzorec/rovnica/predpis Matematický objekt
2	Grafom, predpisom, bodmi, tabuľkou	Graf Vzorec/rovnica/predpis Tabuľka Iná odpoveď
3	Pri výpočte objemov a povrchov, pri štatistikách, pri predpovediach	V matematike Štatistika Predikcia
4		Graf Tabuľka Vzorec/rovnica/predpis

Zakódované dáta sme analyzovali na základe vytýčených hľadísk. Najskôr sme skúmali zastúpenie zmysluplných odpovedí, ďalej sme skúmali odpovede z hľadiska pohľadov na funkciu, reprezentácií a využitia funkcie. Okrem toho sme sa zamerali na počet využívaných kategórií žiakmi rôznych škôl a porovnávali šírku ich „concept image“.

Výsledky

Výsledky ukázali, že respondenti použili rôzne kategórie na zodpovedanie rôznych položiek dotazníka. Už v Tab. 2 **Príklady kódovania odpovedí** vidíme, že v prvej položke bolo využitých viacero kategórií rôznymi respondentmi. Táto tabuľka potvrdzuje diverzitu „concept definition“ funkcie u respondentov. V Tab. 4 **Percentuálne zastúpenie zmysluplných odpovedí** uvádzame zmysluplné odpovede v % pre jednotlivé školy a položky dotazníka.

Tab. 4 Percentuálne zastúpenie zmysluplných odpovedí

Položka	Zmysluplné odpovede v %		
	Obchodná akadémia	Bilingválne gymnázium	8-ročné gymnázium
Čo je to funkcia?	40,54	90	82,35
Uved'te všetky spôsoby, ktorými môže byť funkcia reprezentovaná.	48,64	90	88,24
Kedy a ako môžeme použiť funkciu?	35,14	70	88,24
Uved'te 3 rôzne príklady, ktorými by ste „ilustrovali“ pojem funkcia.	72,97	90	100

V Tab. 5 uvádzame počty žiakov využívajúcich rôzne aspekty funkčného myslenia. Okrem štyroch základných pohľadov na funkciu podľa Pittalisa a kol. z roku 2020 sme do tabuľky zaradili aj pohľad na funkciu ako „vzťah závislosti“, keďže tento pohľad využilo vyšší počet žiakov. Z pohľadov na funkciu prevláda korešpondencia a najmenej vyskytujúcim pohľadom je vstup-výstup.

Tab. 5 Aspekty funkčného myslenia

Kategória	Počet žiakov			
	OAKE (38)	GYMES (10)	GYMTV (17)	Celkovo
Vstup-výstup	0	1	0	1
Kovariácia	1	3	0	4
Korešpondencia	6	6	8	20
Matematický objekt	2	1	4	7
Vzťah závislosti	2	1	7	10

Vzhľadom na reprezentácie funkcie môžeme z Tab. 6 odčítať, že viac ako polovica respondentov má vo svojom „concept image“ predpis a graf funkcie. Prekvapivo, žiaci neuvádzali tabuľku ani slovnú reprezentáciu funkcie.

Tab. 6 Reprezentácie funkcie

Kategória	Počet žiakov			
	OAKE (38)	GYMES (10)	GYMTV (17)	Celkovo
Vzorec/rovnica/ predpis	21	9	15	45
Graf	28	10	15	53
Tabuľka	0	2	2	4
Slovne	0	0	1	1

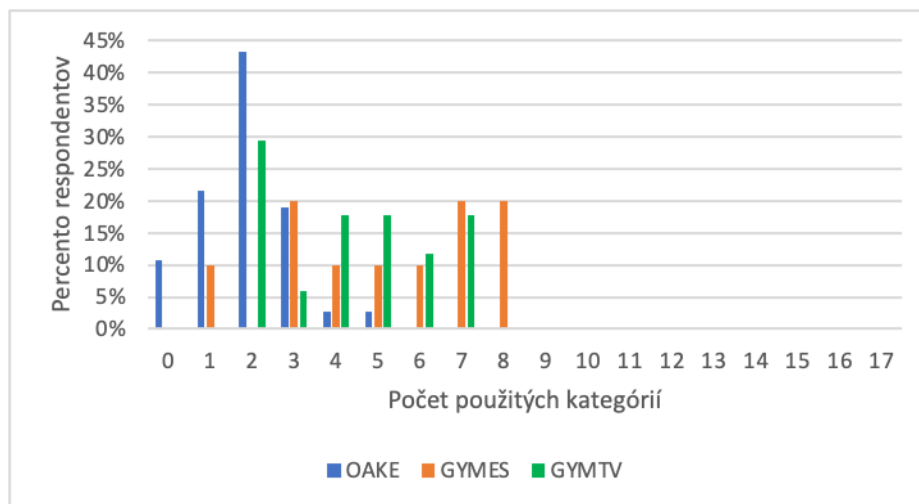
Využitie funkcie vidia žiaci predovšetkým mimo matematiky, ďalej v matematike, na predikciu a niekoľko žiakov vidí využitie v štatistike. Štatistiku a predikciu sme oddelili, lebo nebolo jasné, či ich respondenti vnímajú ako využitie v rámci matematiky, alebo mimo nej. Prehľad odpovedí respondentov je uvedený v **Tab. 7**.

Tab. 7 Využitie funkcie

Kategória	Počet žiakov			
	OAKE (38)	GYMES (10)	GYMTV (17)	Celkovo
V matematike	1	3	5	9
Mimo matematiky	1	6	7	13
Štatistika	1	2	1	4
Predikcia	2	1	2	5

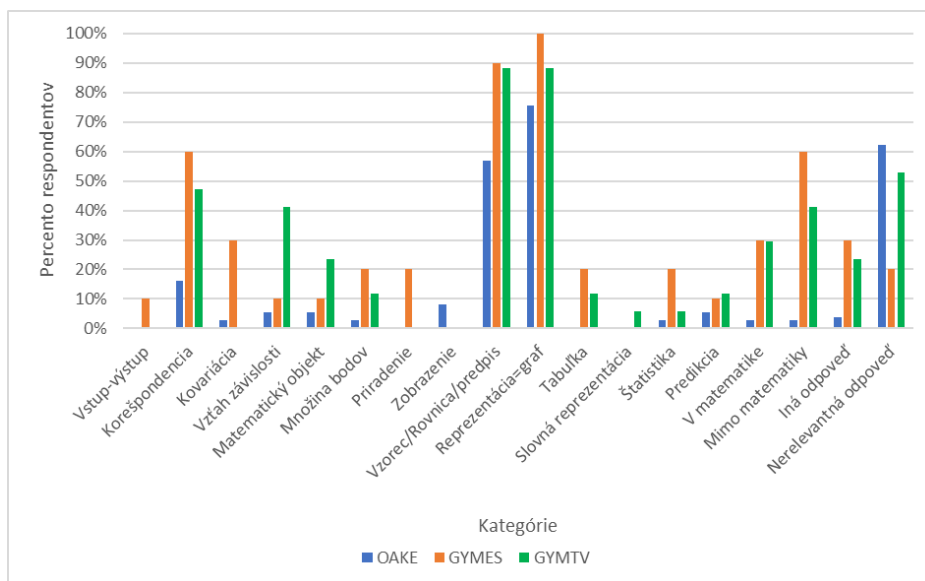
Šírku „concept image“ žiakov hodnotíme podľa celkového počtu využitých kategórií bez ohľadu na položku dotazníka. Počet možných rôznych kategórií je 17. Z grafu (Graf 1) vidíme, maximálny počet využitých kategórií je osem, že žiaci OAKE využili maximálne päť kategórií, žiaci GYMES osem kategórií a žiaci GYMTV najviac sedem kategórií. Na základe tohto usudzujeme, že najširší „concept image“ majú žiaci GYMES.

Graf 1 Početnosť výskytu kategórií bez ohľadu na položku dotazníka u respondentov



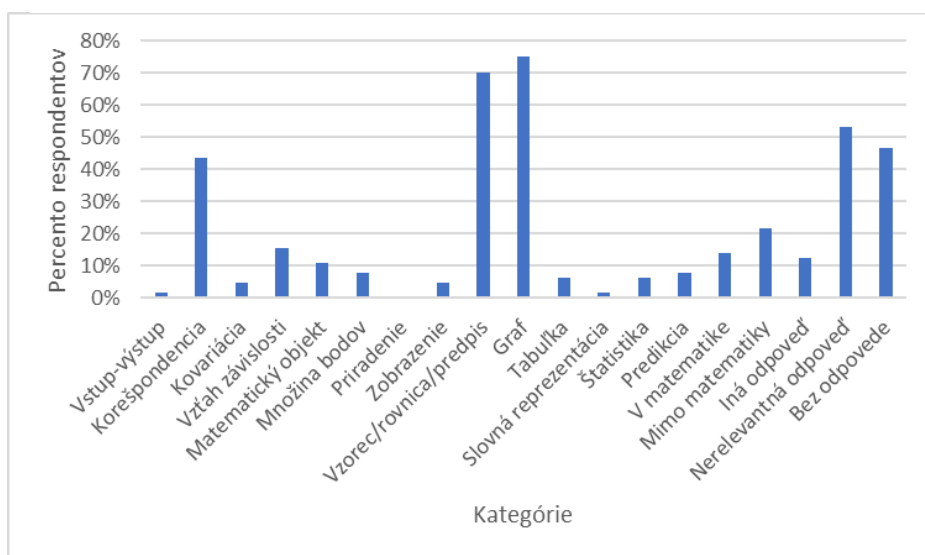
Z grafu (Graf 2) vidíme, že zo všetkých kategórií dominujú reprezentácie funkcie, predpis a graf. Okrem toho výrazné zastúpenie aj nerelevantných odpovedí žiakov OAKE a GYMTV. Z týchto údajov predpokladáme, že žiaci majú vo svojich „concept image“ konflikty.

Graf 2 Percentuálne zastúpenie respondentov rôznych škôl v kategóriách bez ohľadu na položku dotazníka



Nasledujúci graf (Graf 3) ukazuje, že takmer 50% respondentov neuviedlo v jednej alebo viacerých položkách žiadnu odpoveď.

Graf 3 Celkový výskyt kategórií u respondentov



Po analýze učiteľských odpovedí sme zistili, že všetci učители vnímajú funkciu ako vzťah závislosti, pohľad na funkciu ako korešpondenciu sa vyskytol u troch učiteľov, dvaja učители majú kovariačný pohľad a jeden učiteľ má vstupno-výstupný pohľad. Podobne ako

u žiakov, tak aj u učiteľov prevládali reprezentácie graf a predpis. Dvaja učители uviedli aj tabuľkovú reprezentáciu, avšak slovnú reprezentáciu neuviedol ani jeden učiteľ.

Tab. 8 Maximálny počet kategórií žiakov a učiteľov

Typ školy	Maximálny počet kategórií	
	Žiaci	Učители
OAKE	5	7
GYMES	7	7
GYMTV	7	10

Z tabuľky (Tab. 8) vidíme, že podľa predpokladov učители využili viac kategórií a majú širší „concept image“.

Diskusia

Vďaka odpovediam respondentov sme získali informácie o tom, aký „concept image“ pojmu funkcia majú žiaci z rôznych typov škôl. V „concept image“ žiakov sa nachádza predovšetkým pohľad na funkciu ako korešpondenciu. Ostatné pohľady sa vyskytujú menej často. Objavilo sa aj niekoľko miskoncepcií. Niekoľko žiakov uviedlo, že „funkcia je množina všetkých reálnych čísel“, z čoho usudzujeme, že pojem funkcia nemajú dostatočne uchopený a neporozumeli mu. Okrem toho si niektorí žiaci zamieňajú x a y , teda napr. hovoria, že „funkcia je predpis, ktorý každému y priradí práve jedno x “. To by teoreticky mohlo byť v poriadku (ak by funkciu vnímali ako $f(y)=x$), avšak z dát skôr predpokladáme, že ide o zámenu premenných. Zo získaných dát teda vyplýva, že žiaci obchodnej akadémie majú užší „concept image“ pojmu funkcia ako gymnazisti, čo môže byť zapríčinené menším počtom hodín matematiky. Okrem toho sme zistili, že žiaci bilingválneho gymnázia nie sú jazykom, v ktorom študujú limitovaní.

V rámci učiteľských odpovedí sa objavili všetky pohľady na funkciu okrem funkcie ako matematického objektu. Napriek tomu, že ani jeden učiteľ neuviedol slovnú reprezentáciu, predpokladáme, že v ich „concept image“ je, no zabudli ju uviesť. Rovnako vnímame aj absenciu reprezentácie tabuľkou u dvoch učiteľov.

Pri porovnávaní odpovedí žiakov a učiteľov sme objavili odlišnosti v „concept definition“. Učители gymnazistov uvádzali, že „funkcia je zobrazenie...“, avšak ich žiaci tento pohľad na funkciu nevyužívajú. Podobnú nekompatibilitu sme zistili pri využití funkcie, ktoré žiaci vidia v štatistike či na predikciu, no ich učiteľ tieto využitia neuviedol.

Porovnaním našich výsledkov a výsledkov výskumu Vinnera a Dreyfusa z roku 1989 sme dospeli k rovnakému záveru ako autori, a to takému, že platí, čím vyššia úroveň matematiky, tým lepšie odpovede respondentov.

Bibliografia

- Duval, R. 2006. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., Martin, K. 2013. Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: a Comparison Across Academic Levels. In: *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11 (6), s. 1491–1515. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9411-2>

- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. 2020. Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51 (5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164>
- Schnürerová, E. 2023. Porovnanie „concept image“ pojmu funkcia medzi žiakmi a študentmi rôznych škôl. Diplomová práca. Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Košice. <https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioFormChildS786V&sid=5F1CDE603F7696E933FD9B6C99BA&seo=CRZP-detail-kniha>
- Tall, D., Vinner, S. 1981. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, (12), s. 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Vinner, S. 1983. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14 (3), s. 293-305. <https://doi.org/10.1080/0020739830140305>
- Vinner, S., Dreyfus, T. 1989. Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12 (4), s. 356-366. <https://doi.org/10.2307/749441>

Mgr. Enikó Schnürerová

Ústav matematiky

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta

Jesenná 5, 040 01 Košice

eniko.schnurerova@student.upjs.sk

RNDr. Veronika Hubeňáková, PhD.

Ústav matematiky

Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta

Jesenná 5, 040 01 Košice

veronika.hubenakova@upjs.sk