DOI: https://doi.org/10.54937/ssf.2023.22.5.268-277

Schopnosť argumentovať pri riešení matematických úloh u žiakov základnej školy

Ability of argumentation by solving mathematical tasks in elementary school pupils

Jana Salajová, Stanislav Lukáč

Abstract

Rational argumentation both in everyday life and in mathematics education makes an important part of education and communication. When making arguments, it is essential to find proper arguments leading to convince the others of the truth of the drawn conclusions, and/or of the accuracy of the proposed method of problem solving. The contribution presents various views on arguments presented by a range of authors. On the one hand, there is the evidence representing the way of formal argumentation in mathematics, on the other hand, there are less formal arguments to be applied in mathematics at schools, predominantly at elementary schools. The second part of the contribution analyses the results of pedagogical tests aimed at qualifying argumentative skills in the process of solving tasks comprising probability in pupils of year 9 at elementary schools. By choosing the test tasks, we got inspired mainly by the Lawson Classroom Test of Scientific Reasoning along with the tasks taken from the PISA international testing. We focused our attention on the ability of pupils to use problem solving reasoning.

Keywords: Argument. Reasoning. Probability. Mathematics teaching.

Úvod

Súčasťou našej komunikácie v bežnom živote pri rôznych situáciách je argumentácia. Argumentácia je neodmysliteľnou súčasťou matematiky a aj matematického vzdelávania. Každé matematické tvrdenie, ktoré je vyslovené alebo napísané, musí byť zdôvodnené, dokázané. Argumentácia má svoje pevné miesto aj v školskej matematike. V inovovanom Štátnom vzdelávacom programe pre 2. stupeň základnej školy a pre gymnáziá s 8-ročným, 5-ročným aj 4-ročným vzdelávacím programom medzi cieľmi učebného predmetu matematika, ktorý patrí do vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami, nájdeme aj tieto ciele: žiaci rozvíjajú svoje logické a kritické myslenie a argumentujú, komunikujú a spolupracujú v skupine pri riešení problému. Aj medzi cieľmi učebných predmetov fyzika a chémia je uvedené: žiaci prezentujú a obhajujú svoje postupy a tvrdenia logickou argumentáciou založenou na dôkazoch. Obsahom jedného z cieľov učebného predmetu biológia podľa inovovaného Štátneho vzdelávacieho programu pre gymnáziá je, že žiaci prakticky riešia problémy, argumentujú, vyvodzujú závery, navrhujú riešenia (iŠVP ISCED 2, ISCED 3). Schopnosť argumentovať je dôležitou súčasťou rozvíjania kritického myslenia (Kozárová, Gunišová, 2020). Schopnosť argumentovať by mala byť rozvíjaná vo vzdelávacom procese v celej škále vyučovacích predmetov pre jej dôležité miesto v bežnej komunikácii a tiež pre vzťah argumentačných schopností ku kritickému (hodnotiacemu) mysleniu.

Argumenty a argumentácia

Čo je argumentácia? Nad touto otázkou sa zamýšľali viacerí autori. Vybrali sme niekoľko charakteristík tohto pojmu. Podľa Tomáškovej (2015) je argumentácia logické zdôvodňovanie prostredníctvom jazykových prostriedkov; druh exemplifikácie, v ktorej sa objasňuje, zdôvodňuje a dokazuje isté tvrdenie, pričom sa vyvíja úsilie presvedčiť niekoho o niečom. Klapetek (2008) označuje argumentáciu za proces, počas ktorého sú predkladané tvrdenia a informácie a „ktorého cieľom je dosiahnuť u presvedčovanej strany zmenu názoru na určitú skutočnosť alebo otázku" natoľko, že presvedčovaný bude „schopný tento nový názor považovať za svoj, bude mu rozumieť a bude schopný ho ďalej obhajovať". Hincová a Húsková (2009) uvádzajú, že argumentácia je presvedčovanie na základe uvádzania dôvodov, ktoré majú viesť k prijatiu toho, čo je predpokladané. Je to odôvodňovanie pravdivosti či správnosti tvrdenia, názoru hľadaním správnych dôkazových prostriedkov ako dôvodov určitého tvrdenia. Argumentácia je účinný nástroj uvažovania, ktorý spočíva vo vyslovovaní tvrdení, potvrdzovaní alebo aj odmietaní výsledkov matematického uvažovania zacieleného na vyriešenie určitého problému (Almpani, Stefaneas, Vandoulakis, 2023). Viacerí autori sa zhodujú na tom, že cieľom argumentácie je dostať sa k pravde, presvedčiť svojich oponentov o pravdivosti svojho tvrdenia, o správnosti svojho riešenia (Tomášková, 2015; Staněk, 2011; Kratochvílová, 2007). Základným prvkom argumentácie sú **argumenty**. Argument predstavuje uvedenie dôvodu pravdivosti určitého tvrdenia (Pedemonte, 2007). Argumenty vychádzajú z iných tvrdení – premís.

V matematike sa argumentácia spája s dôkazom. Dôkaz obsahuje argumenty na zdôvodnenie pravdivosti určitého tvrdenia založené na nespochybniteľných pravidlách výrokovej logiky, axiómach, definíciách, matematických vetách. Predstavuje konečný výsledok procesu dokazovania (Almpani, Stefaneas, 2023). Argumentácia je neoddeliteľnou súčasťou procesu objavovania matematických dôkazov (Almpani, Stefaneas, Vandoulakis, 2023). Do argumentácie možno zahrnúť aj **neformálne argumenty**, ktoré predstavujú pokusy o výber stratégie, ohodnotenie alebo odmietnutie argumentov predložených inými osobami. V matematickom vzdelávaní neexistuje dohodnutá definícia argumentácie, aj keď je to jedna z najčastejších činností v triede (Pedemonte, 2007).

Z druhov argumentov, ktoré uvádza Tomášková (2015), považujeme pre vyučovanie matematiky za najdôležitejšie: argumenty odvodené z definície, argumenty vytvorené zo vzťahu príčiny a následku, argumenty založené na analógii. Ďalšími východiskami pre argumenty môžu byť: informácie, fakty, osobné svedectvo, skúsenosť. Kratochvílová (2007) delí argumenty na **faktické** – vychádzajúce priamo z poznatku, zo skúsenosti, **logické** – vyplývajúce z logického odvodzovania a vzájomnej kombinácie myšlienok a **emocionálne** – využívajúce rôzne podnety na city.

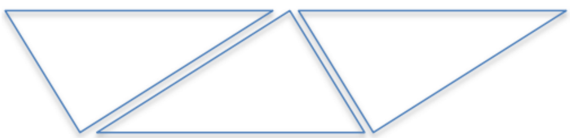
Matematická argumentácia je proces dynamickej sociálnej diskusie o objave nových matematických myšlienok a presviedčanie ostatných o pravdivosti tvrdenia. (Rumsey, Langrall, 2016). Staněk (2011) rozlišuje deduktívne a induktívne argumenty. **Deduktívne argumenty** umožňujú z pravdivosti predpokladov (premís) vyvodiť pravdivý záver s úplnou istotou, sú to argumenty založené na pravidlách výrokovej logiky. Napr. *Prvočíslo je prirodzené číslo väčšie ako 1, ktoré má len triviálne delitele. Párne čísla sú deliteľné dvoma. Číslo 2 je jediné párne prvočíslo*. **Induktívne argumenty** vychádzajú z konkrétnych príkladov, ktoré môžu viesť k zovšeobecneniu, predpoklady podporujú záver len s istou pravdepodobnosťou. Ako príklad možno uviesť štatistické zovšeobecnenie, keď na základe vlastnosti vzorky sa usúdi vlastnosť pre celú populáciu. Príklad induktívneho argumentu súvisiaci s prvočíslami: *Okrem čísla 2 sú všetky prvočísla do 100 nepárne. Preto pravdepodobne číslo 2 je jediné párne prvočíslo.*

Pri analýze argumentov je užitočné identifikovať predpoklady a záver argumentu. Staněk (2011) opisuje štyri typy argumentačných schém:

1. **Vertikálna schéma**. Záver jedného argumentu je predpokladom druhého argumentu. Príklad: *Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Štvoruholník sa dá uhlopriečkou rozdeliť na dva trojuholníky. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v štvoruholníku je 360°.*
2. **Horizontálna schéma.** Záver argumentu je podporovaný niekoľkými nezávislými predpokladmi, pričom každý predpoklad podporuje záver sám o sebe. Príklad: *V rovnoramennom trojuholníku sú uhly pri základni zhodné. V pravouhlom trojuholníku je jeden vnútorný uhol pravý a dva vnútorné uhly sú ostré. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. V rovnoramennom pravouhlom trojuholníku majú uhly pri základni veľkosť 45°.*
3. **Spojené premisy.** Záver je podporovaný niekoľkými predpokladmi, ktoré záver podporujú iba vtedy, ak sú všetky pravdivé. Príklad: *Hod mincou je nezávislý pokus. Pravdepodobnosť, že pri hode mincou padne číslo (znak), je ½ . I keď pri opakovaných hodoch mincou padol viackrát po sebe znak, pri nasledujúcom hode mincou pravdepodobnosť, že padne číslo, je ½*.
4. **Niekoľkonásobný záver.** Z premisy (alebo z viacerých premís) možno vyvodiť viac záverov. Príklad: *Rovnobežník je rozdelený uhlopriečkou na dva zhodné trojuholníky. Súčet vnútorných uhlov v rovnobežníku je 360°. Protiľahlé strany rovnobežníka majú rovnakú dĺžku. Protiľahlé vnútorné uhly rovnobežníka sú zhodné.*

V školskej matematike majú svoje miesto aj neformálne argumenty. Často môžu mať väčšiu vysvetľujúcu silu ako formálne dôkazy. Žiaci ZŠ môžu vytvárať argumenty na základe konkrétnych faktov, poznatkov, ako sú príklady, kresby, diagramy. Takéto argumenty môžu mať zmysel a byť správne, aj keď nie sú zovšeobecnené. Neformálne argumenty umožňujú mladším alebo menej skúseným žiakom používať racionálne argumenty pri zdôvodňovaní, prečo je daný výrok pravdivý. Umožňujú odkrývať a reprezentovať myslenie žiakov (Yopp et al., 2020).

Yopp, Elly (2016) vyzdvihujú všeobecný príklad (generic example) ako dôležitý typ neformálneho argumentu v školskej matematike. Ako príklad môžeme uviesť zdôvodnenie tvrdenia, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°. Žiak ZŠ môže zdôvodniť toto tvrdenie tak, že vystrihne z papiera tri zhodné trojuholníky a vhodným otočením a umiestnením troch vnútorných uhlov do spoločného vrcholu ukáže pomocou tohto príkladu, že ich súčtom je priamy uhol.



Obr. 1 Ukážka využitia príkladu pri zdôvodňovaní tvrdenia

Pedagogická sonda do argumentačných schopností žiakov

Schopnosť žiakov argumentovať, zdôvodňovať svoje riešenie matematickej úlohy, sme overovali v dvoch základných školách. Do pedagogickej sondy bolo zapojených spolu 55 žiakov 9. ročníka, z nich bolo 27 chlapcov a 28 dievčat. Žiaci riešili test pozostávajúci z 9 úloh z pravdepodobnosti. Vzhľadom k tomu, že sme sa chceli zamerať na argumentačné schopnosti žiakov, zdrojom a inšpiráciou testových úloh bol *Lawson's Classroom Test of Scientific Reasoning* (Lawson, 2000). Lawsonov test pozostáva z úloh z oblasti fyziky, chémie, biológie a matematiky, pričom úlohy z matematiky boli z pravdepodobnosti. Preto nami vytvorený test pozostával z úloh z pravdepodobnosti. Niektoré úlohy tvorili na seba nadväzujúce dvojice, pričom prvá úloha bola zameraná na riešenie konkrétnej úlohy na pravdepodobnosť náhodného javu a druhá úloha ponúkala možnosti na zdôvodnenie riešenia z prvej úlohy. Pri výbere ďalších úloh do testu sme sa inšpirovali úlohami v nasledujúcich zdrojoch: test *Education & Children's Books, Higher Chapter 8 – Probability Test A* (Oxford University Press, 2015), zverejnené matematické úlohy v medzinárodnom testovaní PISA z roku 2003 (ŠPÚ, Bratislava, 2004), úlohy použité v práci *Matematické vzdelávanie a rozvoj kľúčových kompetencií na úrovni reflexie* (Kolková, 2011). Pri otvorených otázkach sa od žiakov požadovalo aj zdôvodnenie riešenia.

Analýza žiackych riešení a použitej argumentácie vo vybraných úlohách

Úvodná úloha (zdroj: PISA – matematika úlohy 2003) bola zameraná na porozumenie tvrdenia o pravdepodobnosti zemetrasenia.

1. úloha:

V televízii vysielali dokumentárny program o zemetraseniach a o tom, ako často k nim dochádza. Diskutovalo sa tiež o tom, či je možné predpovedať zemetrasenie.

Geológ povedal*: „Pravdepodobnosť, že by v nasledujúcich dvadsiatich rokoch bolo zemetrasenie v meste Zedland, je* $\frac{2}{3}$*.“*

Ktoré z nasledujúcich tvrdení najlepšie vystihuje význam geológovho tvrdenia?

A. Keďže $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13{,}3$, znamená to, že v Zedlande bude zemetrasenie odteraz približne medzi 13. a 14. rokom.

B. Keďže $\frac{2}{3}$ je viac ako $\frac{1}{2}$, môžeme si byť istí, že zemetrasenie v Zedlande bude niekedy počas budúcich dvadsiatich rokov.

C. Pravdepodobnosť, že zemetrasenie v Zedlande bude niekedy počas budúcich dvadsiatich rokov je vyššia ako pravdepodobnosť, že nebude.

D. Nemožno povedať, čo sa stane, pretože nikto si nemôže byť istý, kedy bude zemetrasenie.

Správnu odpoveď C zvolilo 56,3 % žiakov. 20 % žiakov zvolilo možnosť B, 9,1 % žiakov zvolilo možnosť A a 12,7 % žiakov možnosť D. Jeden žiak označil dve možnosti.

Nasledujúce dve úlohy boli vybraté z Lawsonovho testu (*Lawson's Classroom Test of Scientific Reasoning,* Lawson, 2000). Tieto úlohy na seba nadväzujú: obsahom úlohy 2.b) sú možnosti zdôvodnenia riešenia úlohy 2.a).

2. úloha:

a) V nepriehľadnom vrecku je šesť štvorcových drievok, ktoré sú pomiešané. Drievka majú rovnakú veľkosť a tvar, ale tri z nich sú červené a tri žlté. Ak náhodne vytiahneme jedno drievko, aká je pravdepodobnosť, že bude červené?

A. $\frac{1}{6}$ D. 1

B. $\frac{1}{3}$ E. Nedá sa určiť

C. $\frac{1}{2}$

b) Zdôvodnenie odpovede na úlohu a) – LEBO
   A. 3 drievka zo šiestich sú červené.
   B. Nedá sa predpovedať, aké drievko vytiahnem.
   C. Len jedno drievko vytiahnem z vrecka.
   D. Všetkých 6 kusov má rovnakú veľkosť a tvar.
   E. Iba 1 červené drievko môžeme vytiahnuť z 3 červených drievok.

Úspešnosť žiakov a percentuálne zastúpenie jednotlivých odpovedí pri riešení úloh 2.a), 2.b) sú uvedené v tabuľke 1:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**?**
Úloha 2.a)	21,8 %	21,8 %	50,9 %	1,8 %	1,8 %	1,8 %
Úloha 2.b)	65,5 %	7,3 %	9,1 %	10,9 %	5,4 %	-

Tab. 1 Úspešnosť žiakov v 2. úlohe testu

Pravdepodobnosť náhodného výberu červeného drievka v úlohe 2.a) správne vyriešilo 50,9 % žiakov. Paradoxne, viac žiakov (65,5 %) zvolilo správne zdôvodnenie riešenia tejto úlohy. 11 žiakov napriek nesprávnemu riešeniu úlohy a) zvolilo správne zdôvodnenie z možností v úlohe b), čo však v tomto prípade nemôžeme považovať za správnu argumentáciu. Ak budeme za správnu argumentáciu považovať odpoveď A v úlohe 2.b) len u tých žiakov, ktorí zvolili správnu možnosť C v úlohe 2.a), je úspešnosť žiakov pri riešení úlohy 2.b) 45,5 %.

Zdrojom ďalšej úlohy bol test v *Education & Children's Books, Higher Chapter 8 – Probability Test A* (Oxford University Press, 2015). Táto úloha je rozčlenená na 3 otázky. Žiaci nemali k dispozícii možnosť výberu odpovede a očakávali sme od nich zdôvodnenie svojho riešenia.

3. úloha:
Skupina detí odpovedala na otázku: „*Aké je tvoje obľúbené zviera?*“ Každé dieťa označilo jedno zviera.
Odpovede detí sú v nasledujúcej tabuľke:

Obľúbené zviera	***Chlapci***	***Dievčatá***
Pes	22	18
Mačka	14	9
Kôň	4	16
Králik	5	12
Iné zviera	17	3

a) Náhodne vyberieme jedno dieťa. Aká je pravdepodobnosť, že obľúbeným zvieraťom tohto dieťaťa je králik?
b) Náhodne vyberieme chlapca. Aká je pravdepodobnosť, že jeho obľúbeným zvieraťom nie je mačka?
c) Náhodne vyberieme jedno z detí, ktorých obľúbeným zvieraťom je kôň. Aká je pravdepodobnosť, že je to dievča?

Úloha 3	Výsledok	Správna odpoveď	Správne zdôvodnenie riešenia
a)	$\frac{17}{120}$	30,9 %	14 žiakov zo 17 (82,4 %)
b)	$\frac{48}{62} = \frac{24}{31}$	21,8 %	11 žiakov z 12 (91,7 %)
c)	$\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$	34,5 %	13 žiakov z 19 (68,4 %)

Tab. 2 Úspešnosť žiakov v 3. úlohe testu

Z úspešností žiakov v jednotlivých častiach 3. úlohy vidíme, že najväčšie ťažkosti mali žiaci s riešením úlohy b). 12,7 % žiakov vypočítalo v tejto úlohe doplnkovú pravdepodobnosť, teda vypočítali pravdepodobnosť, že obľúbeným zvieraťom náhodne vybratého chlapca je mačka. Zdôvodňovanie riešenia bolo u žiakov veľmi podobné, uvádzali, čo znamenajú čísla, ktoré použili pri výpočte pravdepodobnosti.

Nasledujúce dve úlohy mali tiež vzájomnú súvislosť. Pri ich výbere sme sa inšpirovali úlohami použitými v práci Kolkovej (2011).

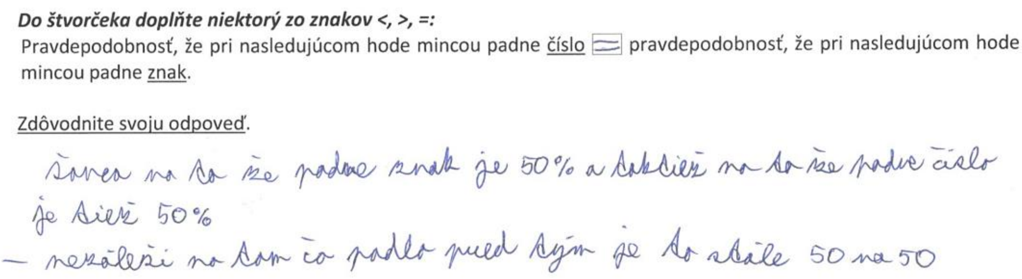
4. úloha:
Fero a Miro hrali hru, pri ktorej hádzali mincou. Fero si všimol, že trikrát za sebou padol znak. Po tomto pozorovaní povedal Mirovi, že pri nasledujúcom hode mincou očakáva padnutie čísla. Miro pri tejto predpovedi len zaváhal a pozdvihol plecia.
Čo platí pre pravdepodobnosť padnutia čísla pri nasledujúcom hode mincou?

Do štvorčeka doplňte niektorý zo znakov <, >, =:
Pravdepodobnosť, že pri nasledujúcom hode mincou padne číslo ☐ pravde-podobnosť, že pri nasledujúcom hode mincou padne znak.
Zdôvodnite svoju odpoveď.

		Zdôvodnenie riešenia
Pravdepodobnosť(padne **číslo**) < pravdepodobnosť(padne **znak**)	14,5 %	Keďže doteraz trikrát padol znak, tak je pravdepodobnejšie, že aj pri nasledujúcom hode padne znak.
Pravdepodobnosť(padne **číslo**) > pravdepodobnosť(padne **znak**)	9,1 %	Keďže doteraz trikrát padol znak, je pravdepodobnejšie, že pri nasledujúcom hode padne číslo.
Pravdepodobnosť(padne **číslo**) = pravdepodobnosť(padne **znak**)	74,5 %	Pravdepodobnosť, že padne znak alebo číslo je vždy rovnaká (50 na 50).

Tab. 3 Úspešnosť žiakov v 4. úlohe testu a ukážky žiackych zdôvodnení riešení

Takmer 75 % žiakov správne rozhodlo, že pravdepodobnosti padnutia znaku a padnutia čísla sú aj pri štvrtom hode rovnaké. Z týchto žiakov svoju odpoveď správne zdôvodnilo 63,4 % (čo je 47,3 % všetkých žiakov). 14,5 % žiakov svoju odpoveď nezdôvodnilo. Niektorí žiaci v svojom zdôvodnení uviedli, že výsledok tohto náhodného pokusu závisí od toho, ako je minca vyhodená.

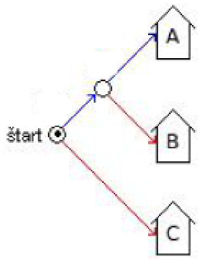

Do štvorčeka doplňte niektorý zo znakov <, >, =:
Pravdepodobnosť, že pri nasledujúcom hode mincou padne <u>číslo</u> = pravdepodobnosť, že pri nasledujúcom hode mincou padne <u>znak</u>.

<u>Zdôvodnite svoju odpoveď.</u>

šanca na to že padne znak je 50% a taktiež na to že padne číslo je tiež 50%
— nezáleží na tom čo padlo pred tým je to stále 50 na 50

Obr. 2 Ukážka žiackeho riešenia a zdôvodnenia riešenia 4. úlohy

<u>5. úloha:</u>
Predstavte si, že stojíte na štarte. Chcete navštíviť niektorého z kamarátov, a to Adama, Borisa alebo Cyrila. Hodíte si mincu. Ak padne číslo, pôjdete po modrej ceste (vľavo), ak znak, po červenej ceste (vpravo). Ak prídete na druhú križovatku, opäť hodíte mincu. Ak padne číslo, pôjdete po modrej ceste (vľavo), ak znak, pôjdete po červenej ceste (vpravo). Po cestách chodíte iba v smere šípok.

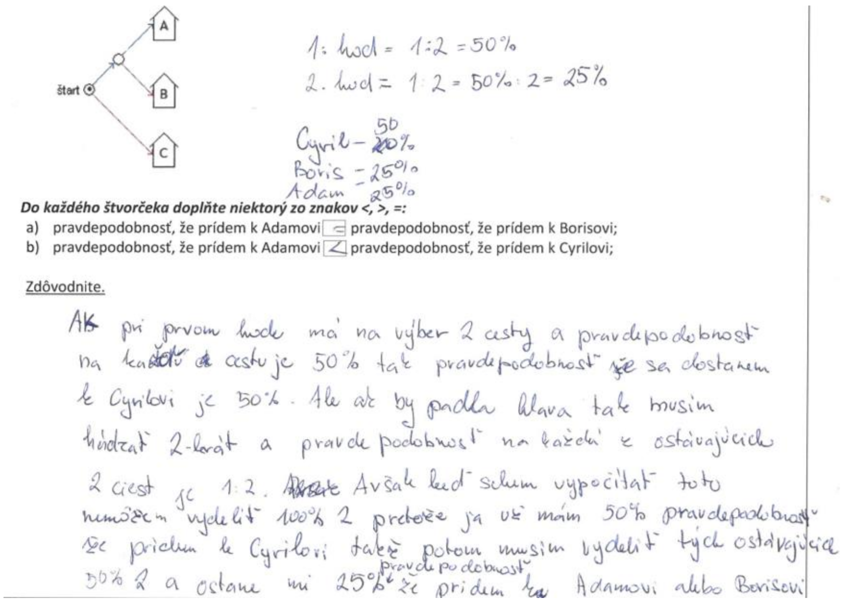


Do každého štvorčeka doplňte niektorý zo znakov <, >, =:
a) pravdepodobnosť, že prídem k Adamovi ☐ pravdepodobnosť, že prídem k Borisovi;
b) pravdepodobnosť, že prídem k Adamovi ☐ pravdepodobnosť, že prídem k Cyrilovi.
<u>Zdôvodnite.</u>

Úloha 5.	Odpoveď „<“	Odpoveď „>“	Odpoveď „=“	Neuvedená odpoveď	*Zdôvodnenie riešenia*
a)	16,4 %	7,3 %	74,5 %	1,8 %	30,9 %
b)	54,5 %	14,5 %	29,1 %	1,8 %	

Tab. 4 Percentuálne zastúpenie odpovedí žiakov v 5. úlohe

Podľa očakávania, viac žiakov správne uviedlo rovnosť pravdepodobností, že prídem k Adamovi alebo k Borisovi. Pri porovnaní pravdepodobností v druhej časti úlohy už boli žiaci menej úspešní (správne riešenie malo 54,5 % žiakov). 41,8 % žiakov správne porovnalo pravdepodobnosti v oboch častiach úlohy. Z týchto žiakov vedelo svoju odpoveď aspoň čiastočne zdôvodniť 73,9 % (čo je 30,9 % zo všetkých žiakov). V uvedenej ukážke na obrázku 3 žiak správne zdôvodnil svoje odpovede.

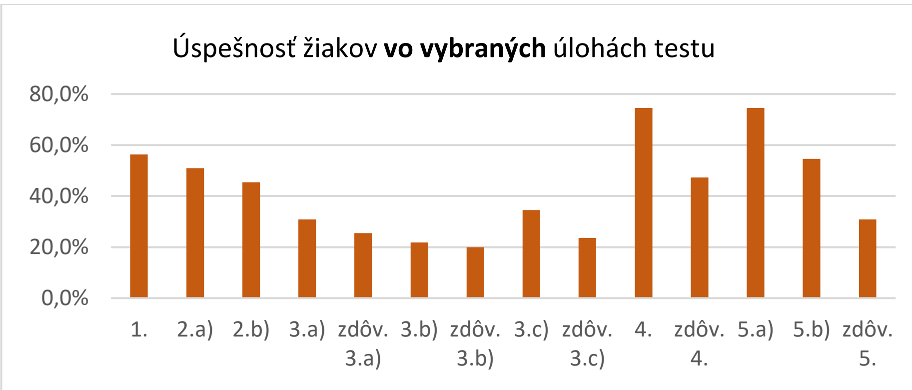


Obr. 3 Ukážka žiackeho riešenia 5. úlohy

Zhrnutie

Žiaci, ktorí boli do pedagogickej sondy zapojení, preberali základy pravdepodobnosti v predchádzajúcom školskom roku. Priemerná úspešnosť žiakov v teste bola 41,4 %, chlapci dosiahli priemernú úspešnosť 47,5 % a dievčatá 35,5 %.

Všeobecne môžeme na základe výsledkov pedagogickej sondy konštatovať, že niektorí žiaci nevedia alebo sa nesnažia presnejšie sformulovať zdôvodnenie svojho riešenia. Až 29,1 % zúčastnených žiakov neuviedlo v teste pri žiadnej úlohe zmysluplnú argumentáciu (nenapísali nič alebo sa vyjadrili napr. „mám taký pocit“, „neviem to odôvodniť“). Žiaci často nevnímajú súvislosti, čo sa prejavilo v 2. úlohe, v ktorej na seba nadväzovali dve parciálne úlohy. Významný počet žiakov vybral v tejto úlohe správne zdôvodnenie riešenia úlohy napriek tomu, že mali označený nesprávny výsledok. Je zaujímavé, že to žiakov neviedlo k tomu, aby sa k úlohe vrátili, skontrolovali si a prípadne opravili svoje riešenie. Tento jav sa zopakoval aj v ďalšej úlohe testu, ktorá bola podobného typu.



Obr. 4 Porovnanie úspešnosti žiakov vo vybraných úlohách testu

Obrázok 4 zobrazuje priemernú úspešnosť žiakov pri riešení vybraných úloh v teste. Nízku úspešnosť žiakov pri riešení 3. úlohy pripisujeme nepozornosti žiakov a ich nedostatočnej koncentrácii. V tejto úlohe bolo potrebné pracovať s údajmi uvedenými v tabuľke, žiaci si museli správne hodnoty z tabuľky vybrať, niektoré sčítať, v závere výslednú pravdepodobnosť vyjadrili v tvare zlomku. Žiaci mohli používať kalkulačku, preto sa v riešeniach nevyskytovali časté numerické chyby. V 5. úlohe v časti b) bola dôvodom nízkej úspešnosti žiakov nedostatočná skúsenosť s riešením tohto typu úloh. 30,9 % žiakov k zdôvodneniu riešenia 5. úlohy uviedlo, že na to, aby sa dostali k Cyrilovi, stačí hodiť mincou raz, ale k Adamovi sa dostaneme až po dvoch hodoch mincou. Traja žiaci zdôvodnili svoju odpoveď tým, že pravdepodobnosti vyčíslili. Väčšina žiakov, ktorí zdôvodnenie napísali, v ňom uviedla, že každý hod mincou je náhodný pokus a pravdepodobnosti, či padne znak alebo číslo, sú rovnaké.

Vedenie a pomoc zo strany učiteľa, aby žiaci svoje riešenie úlohy, postup alebo akýkoľvek názor vedeli vhodne sformulovať a zdôvodniť, napomáha rozvoju vyjadrovacích schopností žiakov, ktoré sú dôležitým predpokladom pre rozvoj ich argumentačných schopností a kritického myslenia. V článku sme opísali pedagogickú sondu, v ktorej sme sa sústredili na vypracovanie a pilotné vyskúšanie testu na diagnostikovanie argumentačných schopností žiakov. V ďalšej etape výskumu sa zameriame na zistenie a porovnanie úrovne rozvoja argumentačných schopností žiakov po rozšírení ich poznatkov z tematického celku pravdepodobnosť. V triedach, ktoré tvorili vzorku, plánujeme zopakovať testovanie a porovnať výsledky žiakov v oboch testoch.

Záver

Analýza výsledkov pedagogickej sondy ukázala, že väčšina zo žiakov 9. ročníka, ktorí boli zapojení do testovania, nemá rozvinutú schopnosť argumentovať na požadovanej úrovni. Schopnosť využívať vhodné a korektné argumenty sa nerozvíja vo vyučovaní samovoľne, ale je potrebné vytvárať učebné situácie podporujúce jej zámerný a cielený rozvoj. Učiteľ by sa mal snažiť navrhnúť pedagogické stratégie na realizáciu učebných aktivít v triede vyžadujúcich od žiakov hodnotenie a obhajovanie žiackych hypotéz, tvrdení a návrhov metód riešenia problémov. Diskusia k hodnoteniu pravdivosti tvrdení, zaujatie stanoviska k argumentom iných žiakov a učebné aktivity zamerané na rozvíjanie schopnosti žiakov využívať racionálne argumenty by mali byť pravidelne zaraďované do vyučovania matematiky.

Bibliografia

Almpani, S., Stefaneas, P., Vandoulakis, I. 2023. Formalization of Mathematical Proof Practice Through an Argumentation-Based Model. In: *Global Philosophy 33:33*, 2023, 28 s.

Almpani, S., Stefaneas, P. 2023. Bridging Informal Reasoning and Formal Proving: The Role of Argumentation in Proof-Events. In: *Foundations of Science*, 2023, 25 s. https://doi.org/10.1007/s10699-023-09926-9

Education & Children's Books, *Higher Chapter 8 – Probability Test B*. Oxford University Press, 2015.

Hincová, K., Húsková, A. 2009. *Slovenský jazyk pre 1. – 4. ročník stredných škôl.* 2. vyd. Bratislava: SPN 2009, 367 s. ISBN 978-80-10-01772-0.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A. 2007. Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. In: *Educational Studies in Mathematics* 66, 2007, s. 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Inovovaný Štátny vzdelávací program. [online]. [cit. 2023-10-26]. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/

Klapetek, M. 2008. *Komunikace, argumentace, rétorika.* Praha: Grada 2008, 256 s. ISBN 978-80-247-2652-6.

Kolková, M. 2011. *Matematické vzdelávanie a rozvoj kľúčových kompetencií na úrovni reflexie*. Dizertačná práca. Košice: UPJŠ v Košiciach, Prírodovedecká fakulta 2011.

Kozárová, N. – Gunišová, D. 2020. *Stratégie rozvoja kritického myslenia vo vyučovaní PEDAGOGIKY*. Nitra: PF UKF v Nitre 2020, 195 s. ISBN 978-80-558-1518-3.

Kratochvílová, E. a kol. 2007. *Úvod do pedagogiky.* Prvé vyd. Trnava: TYPI UNIVERSITATIS TYRNAVIENSIS 2007, 168 s. ISBN 978-80-8082-145-6.

Lawson, A. E. 2000. *Classroom test of scientific reasoning*. Arizona State University 2000.

Pedemonte, B. 2007. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? In: *Educational Studies in Mathematics* 66, 2007, s. 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

PISA – matematika ÚLOHY 2003. prvé vydanie. Bratislava: ŠPÚ 2004, 40 s. ISBN 80-85756-89-7.

Rumsey, Ch., Langrall, C. W. 2016. Promoting Mathematical Argumantation. In: *Teaching Children Mathematics*. March 2016, s. 413-419. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.7.0412

Staněk, R. 2011. *Lekce 4: Argumentace.* [online]. [cit. 2023-10-25]. Dostupné na: https://docplayer.cz/89840722-Argumentace-co-je-argumentace.html

Tomášková, J. 2015. *Argumentácia v škole i v bežnom živote*. 1. vydanie. Bratislava: MPC 2015, 56 s. ISBN 978-80-565-0380-5.

Yopp, D. A. – Ely, R. 2016. When does an argument use a generic example? In: *Educational Studies in Mathematics* 91, 2016, s. 37-53. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9633-z

Yopp, D. A., Ely, R., Adams, A. E., Nielsen, A. W. – Corwine, E. C. 2020. Eliminating counterexamples: A case study intervention for improving adolescents' ability to critique direct arguments. In: *Journal of Mathematical Behavior* 57, 2020, 19 s. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100751

Mgr. Jana Salajová
Ústav matematiky
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta
Jesenná 5, 040 01 Košice
jana.salajova@upjs.sk

Doc. RNDr. Stanislav Lukáč, PhD.
Ústav matematiky
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Prírodovedecká fakulta
Jesenná 5, 040 01 Košice
stanislav.lukac@upjs.sk