DOI: https://doi.org/10.54937/ssf.2023.22.5.110-120

O možnosti aplikácie kvantilovej regresie vo výskume v oblasti didaktiky matematiky

On the possibility of applying quantile regression in research in the field of mathematics didactics

Eva Litavcová, Lucia Csachová

Abstract

In the history of mathematics, it is possible to find many extraordinary ideas, based on which new discoveries are currently being made. A great example is quantile regression. Currently quantile regression is often used in various fields of research in situations where it is necessary to use regression analysis and at the same time the prerequisites for using the least squares method are not met. In addition, quantile regression provides information that cannot be obtained directly from standard regression methods. The entire conditional distribution can be modelled in it, for example when it is applied in the performance evaluation of the examined pupils. In specific applications, it provides answers to important questions about modelling the tails of the conditional distribution. The article shows the advantages of its use in various areas of research and, on its own examples of application to pedagogical data, indicates the possibility of its use on data from the field of mathematics didactics.

Keywords: Quantile regression. Pedagogical research. Mathematics didactics.

Úvod

Karl Pearson v roku 1896 (Pearson, 1896) publikoval korelačný koeficient, inšpirovaný nielen zásadnou prácou Sira Francisa Galtona spred dvoch rokov (Galton, 1894) ale aj jeho fascináciou genetikou, kde Galton v roku 1875 medzi priateľmi prvý krát prezentoval lineárny vzťah medzi dcérskou a materskou náhodnou veličinou. Úsilie spomínaných dvoch výskumníkov neskôr prinieslo všeobecnejšie techniky viacnásobnej regresie. Mladší z nich Pearson vo svojich neskorších prácach vysvetľuje Galtonovo prvenstvo na objavení lineárnej regresie (Stanton, 2001). Objavením lineárnej regresie po prvý krát v problematike genetiky bola započatá epocha využívania regresie vo všetkých oblastiach skúmania. Avšak predpoklady v lineárnej regresii použitej metódy najmenších štvorcov (OLS), ako je predpoklad normality rozdelenia náhodných chýb s nulovými strednými hodnotami pre každé meranie, homoskedasticity a ich vzájomnej nezávislosti sú pre reálne problémy sveta často obmedzujúce. Taktiež nepovšimnuté vybočujúce a extrémne hodnoty spôsobujú fatálne skreslenie odhadu a následné mylné interpretácie. Galtonova prvotná myšlienka pre spôsob skúmania jednoduchého lineárneho vzťahu dvoch náhodných veličín sa ďalším vývojom štatistiky stala základom množstva novších štatistických metód, napríklad zovšeobecnených lineárnych modelov, nelineárnych modelov a rozličných zložitých metód napríklad pri práci s časovými radmi.

Klasická lineárna regresia modeluje podmienenú strednú hodnotu závisle premennej Y pri danom vektore nezávisle premenných $\boldsymbol{X}$. V roku 1987 Roger Koenker a Gilbert Basset

(Koenker a Basset, 1978), inšpirovaní prácou jezuitského katolíckeho kňaza z Dubrovníka Ruđera Josipa Boškovića, ktorý navrhol v roku 1760 geometrický algoritmus na konštrukciu mediánovej regresie, prvý krát predstavili svoj odhad podmieneného mediánu a ďalších kvantilov závisle premennej *Y*, odozvy od nezávisle premenných ***X*** (Koenker, 2005). Kvantilová regresia bola nová myšlienka, ktorá viedla k odvodeniu nových a pretransformovaniu starších štatistických metód na jej báze. Roger Koenker ich v práci (Koenker, 2017) stručne vysvetľuje a sumarizuje po 40-tich rokoch od vzniku kvantilovej regresie.

Študenti, ktorí sa zúčastňujú kurzu štatistiky, sa v časti deskriptívna štatistika naučia počítať kvantily, resp. percentily. Avšak aj napriek rozšírenému používaniu kvantilov na sumarizáciu údajov je ešte relatívne málo analytikov oboznámených s kvantilovou regresiou ako metódou štatistického modelovania (Rodriguez a Yao, 2017).

V tomto článku kvantilovú regresiu najprv stručne predstavíme. Potom ako príklad uvedieme jej vlastné použitie na údajoch, na ktorých by použitie klasickej lineárnej regresie nebolo vhodné. Ďalej sa venujeme výskytu jej použitia v pedagogickej literatúre. Napokon uvedieme niekoľko vlastných príkladov jej použitia na pedagogických údajoch v záujme uplatnenia v oblasti didaktiky matematiky.

Kvantilová regresia

Kvantilová regresia vychádza z myšlienky, že pomocou jednoduchej alternatívy OLS je možné kvantily definovať ako optimalizačný problém (Koenker a Hallock, 2001). Rovnako ako je možné definovať výberový priemer ako riešenie problému minimalizácie súčtu štvorcov rezíduí, medián je možné definovať ako riešenie problému minimalizácie súčtu absolútnych rezíduí.

Ak máme náhodný výber $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, tak riešením

$$\min_{\mu\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu)^2$$

získame výberový priemer, odhad nepodmienenej populačnej strednej hodnoty. Analogicky riešením

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - \xi)$$

získame τ -tý výberový kvantil, kde stratová funkcia

$$\rho_\tau(u) = \tau \max(\mathrm{u}, 0) + (1-\tau)\max(-\mathrm{u}, 0)$$

pridelí iba pre medián symetricky rovnaké, pre ostatné kvantily asymetricky rôzne váhy kladným a záporným rezíduám. Nahradením skaláru ξ parametrickou funkciou $\xi(x,\beta)$ získame v prvom prípade odhad podmienenej strednej hodnoty

$$\min_{\beta\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \xi(x,\beta))^2$$

a v druhom prípade odhad podmienenej kvantilovej funkcie pre daný kvantil

$$\min_{\beta\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - \xi(x,\beta)).$$

Pokiaľ funkcia $\xi(x,\beta)$ je v parametroch lineárnou funkciou, úloha môže byť formulovaná ako úloha lineárneho programovania a efektívne riešená. (Koenker a Hallock, 2001). Koenker (2005) v sumárnej monografii podáva podrobný úvod do problematiky a poskytuje dôkazy a rad príkladov. Práca Koenker (2018), ktorá predstavuje implementáciu kvantilovej regresie v programe R, je v súčasnosti aktuálnou verziou ním pôvodne prvý krát publikovanej implementácie z roku 2005. Tento počin autora inicializoval aplikovateľnosť kvantilovej regresie v širokom povedomí výskumníkov z rôznych odborov. V súčasnosti už majú aktuálne verzie viacerých štatistických programov procedúru na výpočet lineárnej kvantilovej regresie v sebe implementovanú.

Kvantilová regresia teda modeluje kvantily premennej odozvy ako funkciu vysvetľujúcich premenných. Táto metóda je menej vážne ovplyvnená odľahlými hodnotami ako metóda najmenších štvorcov. Keď sú podmienené rozdelenia odozvy veľmi skreslené s možno vysoko nekonštantným rozptylom, metóda môže opísať vzťah lepšie ako jednoduchý normálny model s konštantným rozptylom. Keď však normálny lineárny model skutočne platí, odhady najmenších štvorcov sú oveľa efektívnejšie. (Agresti, 2015).

Príklad použitia kvantilovej regresie

Nasledujúci príklad je ukážkou vhodnej aplikácie lineárnej kvantilovej regresie, čo vychádza z povahy skúmaných údajov. Síce netýka sa pedagogiky, avšak názorne poslúži ako vhodný príklad vzhľadom na výrazné nesplnenie predpokladov pre klasickú metódu najmenších štvorcov.

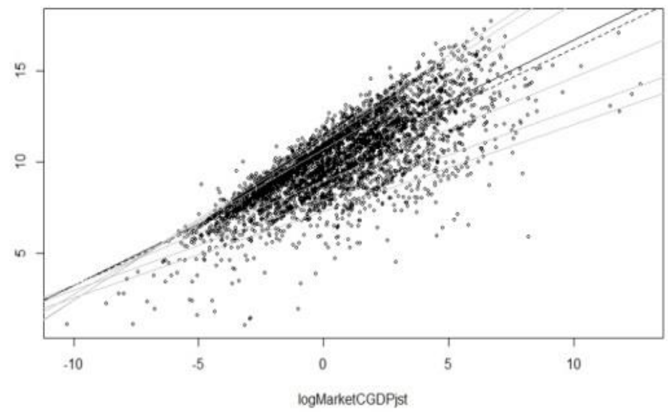
Súbor údajov tvorí 4285 záznamov ekonomického charakteru, ktoré sa týkajú vysvetľovanej premennej - objemu cezhraničných aktivít, teda fúzií a akvizícií a obsahujú aj hodnoty ďalších vybraných premenných. Štatistické údaje pochádzajú z databáz Zephyr (Bureau van Dijk, 2013), Eurostat (European Commission) a Freedom House (Freedom House, 1998-2012). S týmito údajmi, avšak vo väčšom rozsahu ako v tomto článku sme už predtým pracovali (Litavcová a kol., 2016) a tam sú uvedené aj zdroje spomínaných databáz. Uvažujme premenné:

log(M&A_ij,s,t) označuje logaritmus celkovej hodnoty aktív nakúpených prostredníctvom cezhraničných fúzií a akvizícií v cieľovej krajine *j* firmami v sektore *s* rezidentmi v krajine *i* v roku *t*.

log(GDP_i,s,t GDP_j,s,t) označuje logaritmus súčinu dvoch HDP k dátumu *t*, ktoré obmedzujú elasticitu tak, aby bola rovnaká pre krajinu *i* a krajinu *j*, ale žiaden z výsledkov nezávisel od tohto obmedzenia.

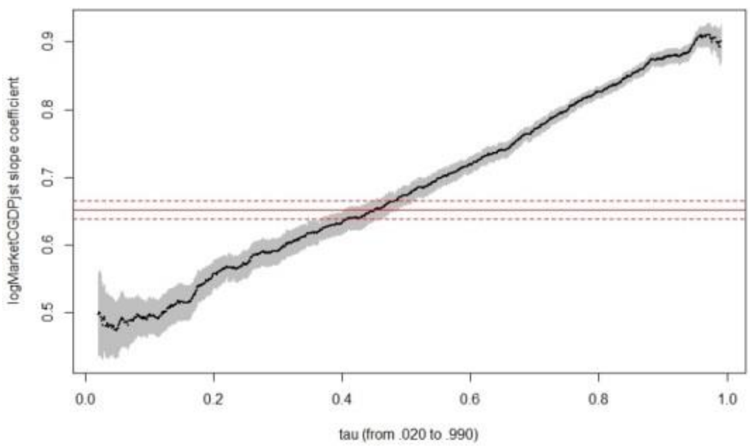
log(MarketC/GDP_j,s,t) označuje logaritmus podielu trhovej kapitalizácie k HDP nadobúdateľa a cieľového sektora. Používa sa ako indikátor vývoja akciového trhu a môže pomôcť kontrolovať akciové bubliny. Údaje o trhovej kapitalizácii predstavujú ročnú priemernú trhovú hodnotu sektora z databázy Zephyr.

Graf 1 obsahuje okrem 7 kvantilových regresií závisle premennej *log(M&Aij,s,t)* na vysvetľujúcej premennej *log(MarketC/GDPj,s,t)* aj regresiu OLS. OLS je čiarkovaná čiara, odhad mediánu čierna čiara a sivé čiary sú odhady kvantilových funkcí pre τ rovné 0.05, 0.1, 0.25, 0.75, 0.9 a 0.95. Z grafu je zrejmá heteroskedasticita rezíduí, teda minimálne jeden z požadova-ných predpokladov OLS nie je platný. Sklon mediánu je vyšší ako sklon odhadu stredných hodnôt, z grafu je zrejmá príčina vo vybočujúcich hodnotách. Sklon regresných kvantilových priamok je rozdielny. Horný chvost rozdelenia závisle premennej reaguje na zmenu nezávisle premennej citlivejšie ako dolný. Použitie kvantilovej regresie tu je odôvodnené.

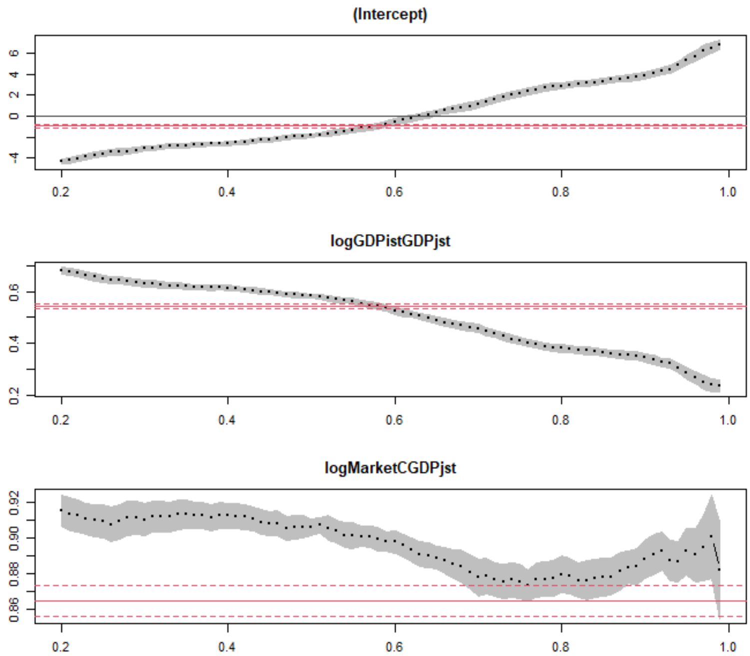


Graf 1. Regresné priamky. Zdroj: vlastné spracovanie v R

Graf 2 obsahuje 970 kvantilových regresií uvedených premenných. Pre dané τ na osi x je čierny bod vypočítaný odhad smernice β podmieneného τ-kvantilu aj s vyznačením konfidenčného intervalu vypočítaného bootstrapovou metódou. Červený pás je odhad OLS. Pokiaľ sa sivá zóna pri danom τ prekrýva s červeným pásom, odhad kvantilu závisle premennej sa od odhadu podmienenej strednej hodnoty štatisticky významne nelíši. Graf 2 nám poskytol viac informácií ako graf 1, teda že smernice kvantilových priamok sú všetky významne odlišné od nuly a vzájomne sú významne odlišné. Je to možné potvrdiť aj číselnými štatistickými testami.



Graf 2. Smernice regresných priamok. Zdroj: vlastné spracovanie v R



Graf 3. Regresné koeficienty v mnohonásobných kvantilových regresiách pre τ od 0,20 do 0,99 (os x). Zdroj: vlastné spracovanie v R

Ďalším modelom je pre každé uvažované τ mnohonásobná lineárna kvantilová regresia

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

použijúc obe vyššie uvedené vysvetľujúce premenné v pozícii x_1, x_2, vysvetľovanú v pozícii y, e_i sú rezíduá modelu, n=4285. Výsledné odhadnuté beta koeficienty pre τ od 0.20. do 0.99 sú uvedené v grafe 3. Pre obe vysvetľujúce premenné, ktoré vstúpili do tohoto modelu platí, že kvantilová regresia tu bola nanajvýš opodstatnená. Až na úzky interval hodnôt kvantilov sa odhady všetkých troch parametrov β_0, β_1, a β_2 odhadnutých lineárnych kvantilových funkcií významne líšia od odhadov stredných hodnôt. Líšia sa významne aj medzi sebou pre rôzne τ.

Kvantilová regresia v pedagogickom výskume

Kvantilová regresia je, vzhľadom na svoje minimálne nároky na predpoklady, výnimočne dobre uplatniteľný nástroj na získanie štatistickej inferencie vo všetkých oblastiach skúmania. Veľmi dobre sa udomácnila v ekonomických vedných odboroch, a pomerne dobre je implementovaná aj v bioštatistike, napríklad v práci (Fenske, 2012). V pedagogike je možné ju nájsť napríklad v práci (Costanzo a Desimoni, 2017), kde autori študujú vzťah medzi výstupom vzdelávania a jeho pravdepodobnými prediktormi.

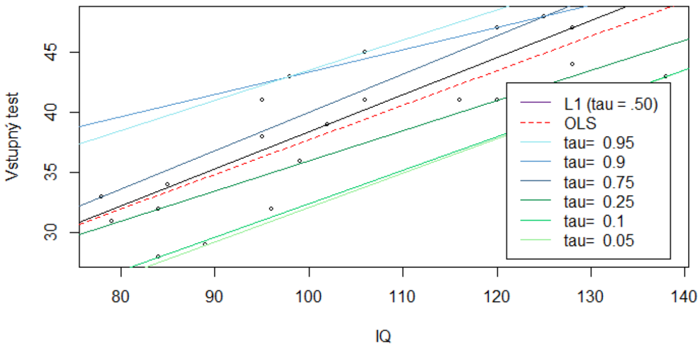
Naliehavou výskumnou témou vo vzdelávaní je štúdium územných rozdielov, v ktorých môže byť kvantilová regresia použitá ako nástroj pre vzdelávaciu politiku. Zisťovanie príčin a vyrovnanie regionálnych či rozdielov vo výsledkoch vzdelávania medzi severnou a južnou časťou Talianska bolo predmetom záujmu (Falzetti, Sacco, 2021) ale takisto (Bratti, Cecchi, Filippin, 2007). Tí sa priamo venovali nedostatočným výsledkom žiakov v PISA testovaní. Podobne sa práca (Reeves, 2012) zaoberá rozdielmi medzi vidieckymi a mestskými študentmi v USA a vplyvom socio-ekonomického statusu rodiny na motiváciu a schopnosti.

Nemenej dôležitou témou pedagogického výskumu využívajúceho pri spracovaní a vyhodnocovaní údajov kvantilovú regresiu je rodová rovnosť v matematickom vzdelávaní. Ako príklad môžeme uviesť štúdie (Constanzo, Desimoni, 2017; Kuhhirt, Klein, Demirer, 2023).

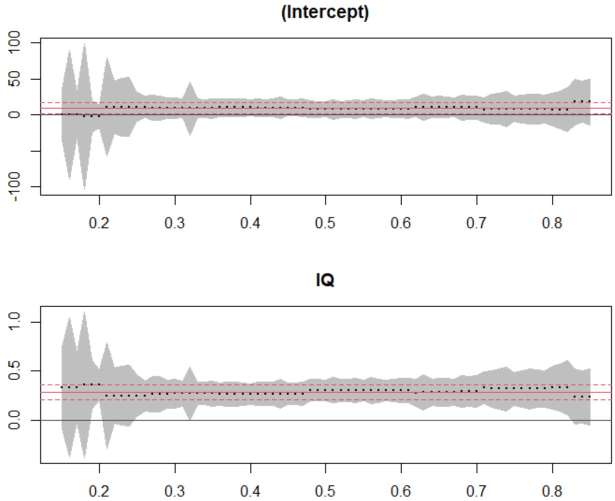
Práca (D'Agostino a kol., 2021) uplatňuje kvantilovú regresiu na determináciu, ako prežívaná úzkosť ovplyvňuje výkon žiakov v matematike a literatúre na výskumných údajoch PISA. Autori (Petscher, a Logan, 2014) kvantilovou regresiou skúmali dosiahnutý úspech v matematike vo vzťahu k socioekonomickému statusu a príslušnosti žiaka k menšine. Dokonca aj v práci (Rodriguez a Yao, 2017), ktorá je v podstate manuálom kvantilovej regresie pre užívateľov štatistického softvéru SAS, sú použité pedagogické údaje pre prezentovanie príkladu týkajúceho sa hodnotenia skúšky.

Príklady použitia kvantilovej regresie v pedagogickom výskume

Pracovali sme s údajmi skupiny 21 študentov, ktorí sa podrobili IQ testu. Na začiatku sledovaného obdobia absolvovali vstupný test a na jeho konci výstupný test z matematiky. Kvantilovú regresiu sme použili na zistenie vzťahu testu z matematiky a hladiny IQ. Graf 4 zobrazuje OLS a 7 kvantilových priamok pre vysvetľovanú premennú *vstupný test* z matematiky a vysvetľujúcu premennú *IQ test*. Sklon pre τ rovné 0.9 je odlišný od ostatných kvantilových priamok, ale vzhľadom k malému počet pozorovaní upustíme od odvážnej interpretácie chvostov rozdelenia vysvetľovanej premennej.

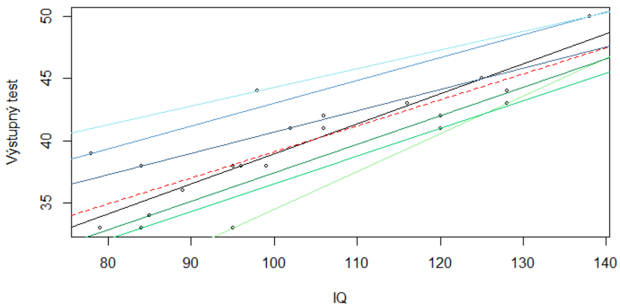


Graf 4. Regresné priamky pre vstupný test z matematiky ~ IQ test. Zdroj: vlastné spracovanie v R.

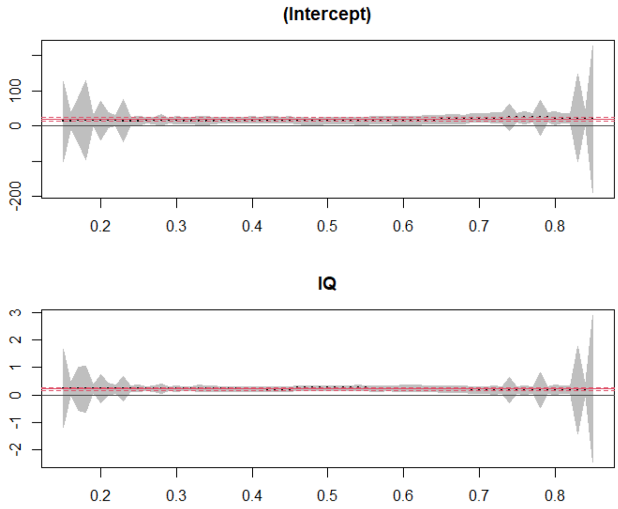


Graf 5. Smernice odhadnutých kvantilových regresných priamok pre τ od 0,15 do 0,85 (os x), pre vstupný test z matematiky ~ IQ test. Zdroj: vlastné spracovanie v R.

Graf 5 je výsledkom 71 kvantilových regresií. Odhad každej zo smerníc kvantilových priamok pre τ od 0,15 do 0,85 leží vo vnútri konfidenčného intervalu pre odhad podmienenej strednej hodnoty, teda sa od nej štatisticky významne nelíši. Avšak v intervaloch spoľahlivosti odhadnutých β koeficientov (graf 5, sivé plochy) pre viaceré hodnoty τ pod dolným kvantilom a niektoré pre τ nad kvantilom rovným 0,8 leží číslo 0, čo naznačuje, že síce v strede rozdelenia je štatisticky významný, ale bližšie k okrajom rozdelenia nie je štatisticky významný vzťah medzi kvantilom vysvetľovanej premennej *vstupný test* a hodnotami vysvetľujúcej premennej *IQ test*.



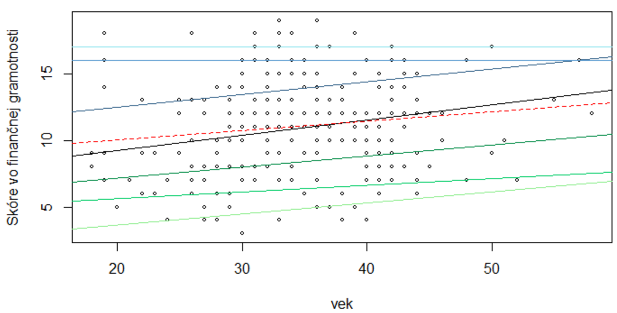
Graf 6. Regresné priamky pre výstupný test z matematiky ~ IQ test. Zdroj: vlastné spracovanie v R.



Graf 7. Smernice odhadnutých kvantilových regresných priamok pre τ od 0,15 do 0,85 (os x), pre výstupný test z matematiky ~ IQ test. Zdroj: vlastné spracovanie v R.

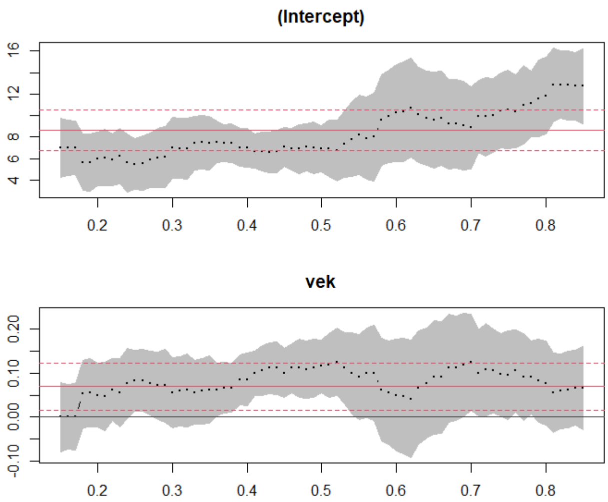
Rovnakej analýze voči IQ testu sme podrobili aj náhodnú premennú *výstupný test* z matematiky. Graf 6 obsahuje regresné priamky pre rovnaké kvantily ako obsahoval graf 4, ale pre zníženú čitateľnosť sme upustili od vloženia legendy. Graf 7 je rovnako ako graf 5 výsledkom 71 kvantilových regresií. Jeho čitateľnosť znižujú veľmi široké intervaly spoľahlivosti na okrajoch rozdelenia. Z hľadiska interpretácie je výsledok pre výstupný test veľmi podobný, ako bol predchádzajúci výsledok pre vstupný test.

V oboch sledovaných vzťahoch, či už medzi vstupným testom z matematiky a IQ testom, alebo výstupným testom z matematiky a IQ testom, nie je použitie kvantilovej regresie až tak odôvodnené ako to bolo v príklade uvedenom vyššie (fúzie akvizície). Tu ju použijeme, ak potrebujeme intrerpretovať konkrétne kvantily, avšak použitie OLS postačuje pre získanie efektívneho odhadu. V príklade vyššie to tak nebolo. Nevylučujeme však možnosť, že použitím rovnakej analýzy na údaje rovnakého charakteru ale vo väčšom rozsahu respondetov bolo by možné získať iný výsledok.



Graf 8. Regresné priamky pre test finančnej gramotnosti ~ vek. Zdroj: vlastné spracovanie v R.

Ďalšími analyzovanými údajmi je skupina 240 respondentov so stredoškolským alebo vysokoškolským vzdelaním, ktorí sa podrobili testu finančnej gramotnosti. Finančná gramotnosť je súbor znalostí, ktoré človeku umožňujú porozumieť financiám a správne s nimi zachádzať v rôznych životných situáciách. Koncept finančnej gramotnosti sa presadil ako samostatná téma medzirezortnej politiky v dobe poslednej svetovej ekonomickej krízy (wikipédia). Je preto nevyhnutné vzdelávanie vo finančnej gramostosti a jej skúmanie a porovnávanie napríklad naprieč krajinami, či rôznymi skupinami a nachádzanie jej prediktorov. Skúmali sme závislosť výsledku testu finančnej gramotnosti a veku. Graf 8 obsahuje kvantilové regresné priamky rovnako ako to bolo v grafe 4 pre τ rovné 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9, 0.95 a priamku OLS. Graf 9 je výsledkom 71 kvantilových regresií. Intervaly spoľahlivosti odhadnutých smerníc kvantilových priamok pre τ od 0,15 do 0,85 sa prekrývajú s konfidenčným intervalom pre odhad podmienenej strednej hodnoty, teda sa štatisticky významne nelíšia. Intervaly spoľahlivosti odhadnutých β koeficientov sa pre τ v intervale 0.36-0.54 a ešte pre niektoré ojedinelé τ s číslom 0 neprekrývajú, teda tu je štatisticky významný vzťah medzi tými kvantilmi premennej *skóre vo finančnej gramotnosti* a hodnotami vysvetľujúcej premennej *vek*.



Graf 9. Smernice odhadnutých kvantilových regresných priamok pre τ od 0,15 do 0,85 (os x), pre test finančnej gramotnosti ~ vek. Zdroj: vlastné spracovanie v R.

Z interpretácie grafu 9 je zrejmé, že vo vzťahu skóre vo finančnej gramotnosti a veku OLS poskytuje efektívny odhad a využitie kvantilovej regresie tu je potrebné iba z dôvodu záujmu o správanie sa vzťahu skúmaných veličín z hľadiska tvaru celého podmieneného rozdelenia závisle premennej.

Záver

Kvantilová regresia je pomerne nový a silný nástroj pre skúmanie vzťahu náhodných premenných. Cieľom článku bolo poukázať na výhody jej použitia a hľadať možnosti jej aplikácie v pedagogickom výskume, špeciálne v oblasti didaktiky matematiky. Prvý príklad, mimo rámca pedagogiky, bol ukážkou toho, ako je dôležité nad rámec priemerných odhadov posúdiť, kde a ako v rámci distribúcie vysvetľovanej premennej je silný s vysvetľovacími premennými súvis. Druhý príklad naznačuje, že pokiaľ v súbore väčšieho rozsahu budú existovať heterogénne účinky v rámci podmieneného rozdelenia výsledkov žiakov z matematiky, použitie kvantilovej regresie je nanajvýš žiadúce. Záver tretieho príkladu je podobný. Tento príklad možno chápať ako motivačný pre skúmanie finančnej gramotnosti aj použitím ďalších možných prediktorov. Nadväzujúc na túto myšlienku plánujeme pokračovať vo výskume zameranom na kritické miesta školskej matematiky, kde sa budeme opierať o výsledky nielen testovania T9, ale i externej časti maturity z matematiky, prípadne o výsledky slovenských žiakov v PISA testovaní.

Bibliografia

Agresti, A. 2015. *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. Wiley Interscience, John Wiley& Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 150 p. ISBN 978-1-118-73003-4.

Bratti, M., Checchi, D., Filippin, A. 2007. Geographical Differences in Italian students' mathematical competencies: Evidence from PISA 2003. In: *Nuova Serie*, Vol. 66 (Anno 120), No. 3, Special Issue Part 2 Economics and Education in Italy, pp. 299-333. ISSN 2611-6111.

Costanzo, A., Desimoni, M. 2017. Beyond the mean estimate: a quantile regression analysis of inequalities in educational outcomes using INVALSI survey data. In: *Large-scale Assessment in Education*, 5(14). ISSN 21960739. https://doi.org/10.1186/s40536-017-0048-4

D'Agostino, A., Spagnolo F.S., Salvati, N. 2021. Studying the relationship between anxiety and school achievement: evidence from PISA data. In: *Statistical Methods & Applications*. ISSN 1618-2510. https://doi.org/10.1007/s10260-021-00563-9

Falzetti, P., Sacco, Ch. 2021. Spatial variations of school-level determinants of reading achievement in Italy. In: *Large-scale Assessments in Education*, Vol. 9, article no: 12. ISSN 21960739. https://doi.org/10.1186/s40536-021-00105-5

Fenske, N. 2012. Structured additive quantile regression with applications to modelling undernutrition and obesity of children. In: *Dissertation thesis*. Munchen. https://doi.org/10.5282/edoc.15161

Galton, F. 1894. *Natural Inheritance* (5th ed.). New York: Macmillan and Company. https://galton.org/books/natural-inheritance/pdf/galton-nat-inh-1up-clean.pdf

Koenker, R., Bassett, G. 1978. Regression Quantiles. In: *Econometrica*, 46(1), 33-50. ISSN:0012-9682. https://doi.org/10.2307/1913643

Koenker, R., Hallock, K. F. 2001. Quantile regression. In: *The Journal of Economic Perspectives*, 15(4), 43-56. ISSN 08953309. https://doi.org/10.1257/jep.15.4.143

Koenker, R. 2005. *Quantile regression*. Cambridge books, Cambridge University Press. ISBN 9780511754098. https://doi.org/10.1017/CBO9780511754098

Koenker, R. 2017. Quantile Regression: 40 Years On. In: *Annual Review of Economics*, 2017 9:1, 155-176. ISSN 1941-1391. https://doi.org/10.1146/annurev-economics-063016-103651

Koenker, R. 2019. *Quantile regression in R: A vignette*. https://cran.r-project.org/web/packages/quantreg/vignettes/rq.pdf

Kuhhirt, M.,Klein, M., Demirer, I. 2023. Children's Academic Achievement and Behavior Problems at the Intersection of Gender and Family. Environment Socius Sociological Research for a Dynamic World. In: *Socius*, 9. ISSN 2378-0231. https://doi.org/10.1177/23780231231199395

Litavcová, E., Hečková, J., Chapčáková, A. 2017. Cross-border mergers and acquisitions as efficient management tool of capital allocation within European area. In: *Polish*

Journal of Management Studies, 16(1), 94–104. ISSN 2081-7452. https://doi.org/10.17512/pjms.2017.16.1.08

Pearson, K. 1896. Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III. Regression, Heredity and Panmixia. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 187, 253-318. ISSN 03702316. https://doi.org/10.1098/rsta.1896.0007

Petscher, Y., Logan, J. A. R. 2014. Quantile Regression in the Study of Developmental Sciences. In: *Child Development*, 85(3), 861–881. ISSN 1467-8624. https://doi.org/10.1111/cdev.12190

Reeves, E. B. 2012. The effects of opportunity to learn, family socioeconomic status, and friends on the rural math achievement gap in high school. In: *American Behavioral Scientist*, 56(7), 887–907. ISSN 1552-3381. https://doi.org/10.1177/0002764212442357

Rodriguez, R. N., Yao, Y. 2017. Five Things You Should Know about Quantile Regression. Paper SAS525-2017. In: *SAS Institute Inc*. https:// support.sas.com/resources/ papers/proceedings17/SAS0525-2017.pdf

Stanton, J. M. 2001. Galton, Pearson, and the Peas: A Brief History of Linear Regression for Statistics Instructors. In: *Journal of Statistics Education*, 9:3. ISSN 1069-1898. https://doi.org/10.1080/10691898.2001.11910537

Príspevok vznikol v rámci grantovej úlohy KEGA 004KU-4/2022 Osobnosti slovenskej matematiky II - životné vzory pre budúce generácie.

doc. Mgr. Eva Litavcová, PhD.
Katedra matematiky
Katolícka univerzita, Pedagogická fakulta
Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok
eva.litavcova@ku.sk

RNDr. Lucia Csachová, PhD.
Katedra matematiky
Katolícka univerzita, Pedagogická fakulta
Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok
lucia.csachova@ku.sk