

Giovanni Torricelli jako matematik

Giovanni Torricelli as mathematician

Jaroslav Beránek

Abstract

A famous Italian scholar Giovanni Evangelista Torricelli is most famous for his physical discoveries. Nevertheless, nowadays it is less known that he dealt with mathematics as well. This article is devoted to his several mathematics results. After a short historical introduction, the author gives the construction of Torricelli's point in a triangle; further he describes an interesting geometrical figure, Torricelli's trumpet, and its analogy, created by rotation of Cissoid of Diocles.

Keywords: Giovanni Torricelli. Torricelli's point. Torricelli's trumpet. cissoid of Diocles.

Úvod

Středověký italský fyzik Giovanni Evangelista Torricelli je osobnost známá všem žákům a studentům, kteří se někdy setkali se studiem fyziky. Jeho známý pokus s trubicí naplněnou rtutí vedl k zavedení fyzikálního pojmu atmosférický tlak vzduchu a ke konstrukci rtuťového tlakoměru. Méně známé však je, že Torricelli byl i vynikajícím matematikem. Některým jeho matematickým výsledkům a jejich souvislostem je věnován tento příspěvek.

Giovanni Torricelli – život a dílo (zkráceně podle [4]-Lebrová 2008)

Giovanni Evangelista Torricelli se narodil 15. října 1608. O jeho dětství se ví velmi málo a údaje nejsou jednoznačné. V letech 1624 – 1626 studoval Torricelli matematiku a filosofii na jezuitské koleji, v období 1626 – 1632 byl tajemníkem matematika Benedetta Castellioho (1578 – 1643). Zde se seznámil s díly slavných starověkých i současných učenců (např. Apollonius, Archimedes, Tycho de Brahe, Johannes Kepler, Mikuláš Koperník). Po ukončení studia prožil 9 let do roku 1641 jako sekretář Galileiho stoupence Giovanioho Battisty Ciampoliho. V této době se zabýval zejména teorií gravitace. V dnešní době je znám Torricelliho zákon o rychlosti vytékání kapaliny otvorem pod hladinou (spis Pojednání o pohybu, „Trattato del moto“, vyšel v roce 1641). Od roku 1642 se stal Torricelli profesorem matematiky na Universitě v Pise. V této roli řešil různé geometrické problémy v teorii kuželoseček. V pojednání „Quadratura parabolae et Solido hyperbolico acuto“ podrobně popisuje vlastnosti kuželoseček a uvádí analytické řešení i takových případů, jako je vedení tečny v bodě paraboly. Méně známý je pojem Torricelliho bod v trojúhelníku, o kterém bude pojednáno dále. Jeho nejvýznamnějším objevem bylo zjištění, že se výška sloupce rtuti v trubicí mění vlivem různého atmosférického tlaku. Na tomto základu vynalezl Torricelli v roce 1644 rtuťový tlakoměr. Torricelli zemřel 25. října 1647 ve Florencii.

Torricelliho bod v trojúhelníku

Torricellimu je připisováno řešení tzv. lokačního problému pro $n = 3$ (v dnešní terminologii). Tento problém stručně popíšeme (viz [1]-Burešová 2009, s. 14-15). Různé obchodní nebo distribuční firmy musí často řešit problém lokace (neboli umístění) obslužných center (např. výrobní závody, sklady, nákupní centra). Toto řešení má značný význam při plánování nákladů spojených s provozem firmy. Nutnost řešení umístění obslužného zařízení v území se poprvé objevuje již v 17. století. Řešení problému, kdy jsou na ploše umístěny tři nekolineární body A, B, C a hledá se lokace čtvrtého bodu ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC tak, aby součet jeho vzdáleností od těchto tří bodů byl minimální, je připisován právě Torricellimu. Podle některých pramenů je řešení připisováno i Pierru Fermatovi. Proto je v dalším hledaný Torricelliho bod označován F (označením tohoto bodu T by mohlo dojít k jeho záměně s těžištěm trojúhelníka). Obecně je možno lokační problém definovat takto:

Nechť je dáno n pevných bodů se souřadnicemi $[a_i, b_i]$. Ke každému z těchto bodů je přiřazeno reálné číslo w_i , které označuje jeho „váhu“. Řešením lokačního problému je hledání souřadnic bodu $[x, y]$, pro který je minimální hodnota výrazu

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i d_i(x, y),$$

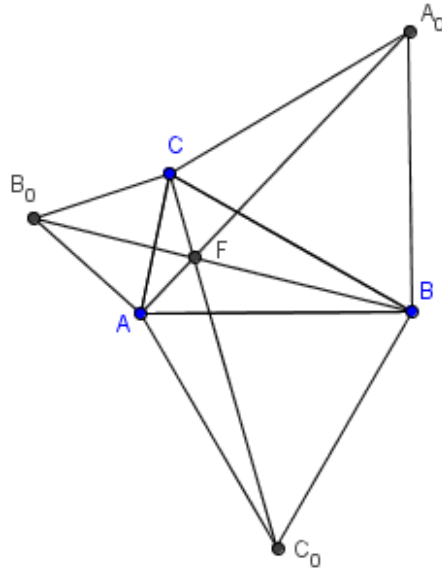
kde $d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ je eukleidovská vzdálenost mezi body $[x, y]$ a $[a_i, b_i]$. Poznamenejme, že v dnešní době jsou podobné problémy optimalizace řešeny pomocí metod lineárního programování.

Grafické řešení lokačního problému pro $n = 3$ (za předpokladu $w_1 = w_2 = w_3 = 1$) navrhnul právě Giovanni Evangelista Torricelli (viz [1]-Burešová 2009, s. 16). Poznamenejme, že původní Torricelliho a Fermatovo řešení bylo formulováno pro ostroúhlý trojúhelník. Později bylo dokázáno, že v dalším textu uvedená konstrukce platí i pro trojúhelníky tupoúhlé, v nichž velikost tupého úhlu je menší než 120° . O řešení lokačního problému pro tupoúhlé trojúhelníky s tupým úhlem o velikosti 120° a více se zmíníme dále.

Řešení 1. Nechť tři zadané nekolineární body A, B, C tvoří vrcholy trojúhelníka, jehož žádný úhel nemá velikost 120° a větší. Hledáme umístění bodu F ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC , jehož součet vzdáleností od bodů A, B, C je minimální (tzv. Torricelliho bod v trojúhelníku). Postup je následující: Nad každou stranou trojúhelníka ABC se vztýčí rovnostranný trojúhelník tak, aby se žádný z nich nepřekrýval s trojúhelníkem ABC . Trojúhelník nad stranou AB označíme ABC_0 , trojúhelník nad stranou AC označíme AB_0C , trojúhelník nad stranou BC označíme A_0BC . Nyní existují dvě možnosti:

a) Každému ze tří rovnostranných trojúhelníků opíšeme kružnici. Tyto tři kružnice se protínají v jediném bodě F , který je hledaným Torricelliho bodem.

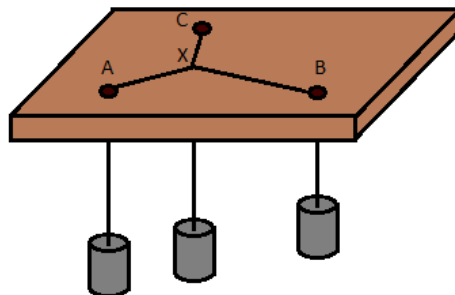
b) Sestrojíme přímky AA_0, BB_0, CC_0 . Tyto tři přímky se rovněž protínají v jediném Torricelliho bodě F . Tomuto bodu někdy též říkáme první izogonický bod trojúhelníka. Toto označení vychází ze skutečnosti, že velikosti úhlů AFB, AFC a BFC jsou rovny 120° . Populárně lze říci, že z Torricelliho bodu F jsou všechny tři strany trojúhelníka ABC „vidět“ pod úhlem 120° .



obrázek 1 (zdroj [1]-Burešová 2009, s. 17)

Řešení 2. Před uvedením důkazu, že Torricelliho bod F skutečně minimalizuje součet délek úseček $|FA| + |FB| + |FC|$ a při stejné váze vrcholů trojúhelníka je řešením lokační úlohy, uvedeme ještě alternativní, mechanický analogový model pro určení bodu F . Pochází od P. Varignonova, podle něhož se nazývá Varignonův rámec. Poznamenejme, že Pierre Varignon (1654-1722) byl významným francouzským matematikem, jehož život a dílo je spjato s Universitou v Caen. Varignonova metoda je využitelná i pro více než tři body s různými vahami; uvedeme ji pro tři body se stejnými vahami. (viz [3]-Kuchařík 2012, s. 34).

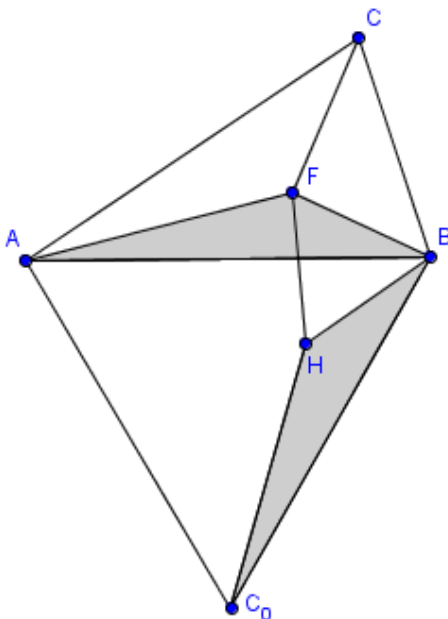
Do vodorovně položené desky vyvrtáme tři otvory A , B , C , aby tvořily vrcholy trojúhelníka ABC . Připomeňme opět, že žádný úhel tohoto trojúhelníka nemá velikost 120° a větší. Tři provázky svážeme do společného uzlu X tak, aby volné konce provázek byly stejně dlouhé. Každý z provázek nyní provlečeme jedním z otvorů tak, aby uzel X zůstal nad deskou. Na konce provázek upevníme tři stejná závaží o stejné hmotnosti m . Soustava závaží nyní zaujme takovou polohu, aby součet délek úseček $|XA| + |XB| + |XC|$ byl minimální; bod X je tedy hledaným Torricelliho bodem F . Také tuto skutečnost dále rovněž dokážeme.



obrázek 2 (zdroj [3]-Kuchařík 2012, s. 34)

Důkaz řešení 1: (viz [3]-Kuchařík 2012, s. 33-34) Víme, že bod F ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC určitě existuje. Proto jsme oprávněni tento bod v trojúhelníku vyznačit (i když jeho umístění neznáme). Nyní uvažme rotaci trojúhelníka ABF o úhel 60°

se středem v bodě B (viz obrázek 3). Obraz bodu F označme H , obraz bodu A označme C_0 . Obrazem trojúhelníka ABF tedy bude trojúhelník C_0BH . Platí rovnost $|BF| = |BH|$, neboť rotace je shodné zobrazení. Velikost úhlu $\sphericalangle HBF$ je 60° , proto je trojúhelník HBF rovnostranný. Platí tedy také $|BF| = |HF|$. Ze stejných důvodů je rovnostranný trojúhelník ABC_0 . V uvedené rotaci je obrazem trojúhelníka ABF trojúhelník C_0BH , platí tedy také $|AF| = |C_0H|$. Do součtu délek úseček $|FA| + |FB| + |FC|$ dosadíme rovnosti $|BF| = |HF|$ a $|AF| = |C_0H|$. Obdržíme $|C_0H| + |HF| + |FC|$, což je délka lomené čáry C_0HFC . Délka této čáry je minimální, leží-li body C_0, H, F, C na jedné přímce, tedy bod F musí ležet na přímce CC_0 .



obrázek 3 (zdroj [3]-Kuchařík 2012, s. 33)

Analogicky pomocí rotace trojúhelníka BCF se středem v bodě C o úhel 60° , kde obraz bodu B označíme A_0 , obdržíme tvrzení, že bod F musí ležet na přímce AA_0 . A konečně při rotaci trojúhelníka ACF se středem v bodě A o úhel 60° (obraz bodu C označíme B_0) obdržíme tvrzení, že bod F musí ležet na přímce BB_0 . Tím je dokázána správnost konstrukce bodu F pomocí postupu 1 b. Zbývá dokázat, že velikosti úhlů AFB , AFC a BFC jsou rovny 120° . Při rotaci trojúhelníka ABF o úhel 60° se středem v bodě B jsme zjistili, že trojúhelník HBF je rovnostranný. Velikost úhlu $\sphericalangle BFH = 60^\circ$. Protože ale body F, H, C_0 jsou kolineární, platí také $\sphericalangle BFC_0 = 60^\circ$. Analogicky z dalších popsaných rotací dostaneme $\sphericalangle CFA_0 = 60^\circ$, $\sphericalangle AFB_0 = 60^\circ$. Z vlastností vrcholových úhlů plyne, že velikosti úhlů AFB , AFC a BFC jsou rovny 120° .

Důkaz postupu konstrukce 1a bezprostředně plyne z tvrzení, že velikosti úhlů AFB , AFC a BFC jsou rovny 120° . Stačí využít vztah mezi velikostmi středového a obvodového úhlu v kružnici. Uvažme např. kružnici opsanou rovnostrannému trojúhelníku ABC_0 . Pro oblouk této kružnice, který leží ve vnější oblasti trojúhelníka ABC , je velikost středového úhlu 240° , a proto je velikost příslušných obvodových úhlů rovna 120° . Platí tedy $\sphericalangle AFB = 120^\circ$. Pro úplnost poznamenejme, že pro oblouk této kružnice, ležící ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC , je velikost středového úhlu 120° , a proto je velikost obvodových úhlů rovna 60° , což odpovídá faktu, že trojúhelník ABC_0 je rovnostranný. Proto lze tvrdit, že bod F leží na

oblouku kružnice opsané trojúhelníku ABC_0 , ležícím ve vnitřní oblasti trojúhelníka ABC . Analogicky pro kružnice opsané trojúhelníkům AB_0C , A_0BC . Tím je dokázána správnost postupu konstrukce 1a.

Důkaz řešení 2: (viz [3]-Kuchařík 2012, s. 34-35) Prohlédněme si znovu obrázek 2. Délku provázků označme l , hmotnost všech závaží m . Po dosažení rovnovážné polohy je první závaží zavěšeno pod deskou v hloubce $l - |AX|$, jeho potenciální energie je $-mg(l - |AX|)$. Analogicky u druhých závaží platí, že jsou zavěšena pod deskou v hloubkách $l - |BX|$, $l - |CX|$, jejich potenciální energie jsou potom $-mg(l - |BX|)$, $-mg(l - |CX|)$. Podle fyzikálních zákonů platí, že soustava v rovnováze zaujme takovou polohu, aby celková potenciální energie celé soustavy byla minimální. Celková potenciální energie je ale vyjádřena součtem

$$E = [-mg(l - |AX|)] + [-mg(l - |BX|)] + [-mg(l - |CX|)].$$

Teto výraz upravíme na tvar $E = -3mgl + mg(|AX| + |BX| + |CX|)$. Veličiny m , g , l jsou konstantní, proto celková potenciální energie závisí na součtu $|AX| + |BX| + |CX|$ a bude minimální, právě když tento součet bude minimální. Bod X je tedy skutečně Torricelliho bodem F v trojúhelníku ABC .

Poznámka: V předchozích úvahách jsme se omezili na trojúhelníky ostroúhlé a tupoúhlé s velikostí tupého úhlu menší než 120° . Bez důkazu nyní uvedeme umístění Torricelliho bodu pro zbývající případ, kdy velikost tupého úhlu je větší nebo rovna 120° .

Nechť ABC je trojúhelník, v němž úhel u vrcholu A (bez újmy na obecnosti) má velikost 120° . Potom výše popsaná konstrukce vede k tomu, že $F = A$, tedy Torricelliho bod splyne s bodem A . Nechť nyní ABC je trojúhelník, v němž úhel u vrcholu A má velikost větší než 120° . Potom podle výše uvedené konstrukce průsečík tří kružnic opsaných rovnostranným trojúhelníkům ABC_0 , AB_0C , A_0BC (při výše uvedeném označení) leží ve vnější oblasti trojúhelníka ABC , což je ve sporu s požadavkem, aby Torricelliho bod ležel uvnitř trojúhelníka ABC . Lze dokázat (viz [3]-Kuchařík 2012), že také v tomto případě $F = A$. Řešením lokačního problému v tomto případě je tedy umístění „centra“ do vrcholu tohoto tupého úhlu.

Poznámka: Při konstrukci Torricelliho bodu jsme sestrojili nad každou stranou původního trojúhelníka ABC rovnostranný trojúhelník. V této souvislosti může mít značný motivační vliv zmínka o vnitřním a vnějším Napoleonově trojúhelníku. Uvedeme příslušné tvrzení, známé jako Napoleonova věta (viz [6]-Pech 2004).

Jestliže nad stranami libovolného trojúhelníka ABC sestrojíme rovnostranné trojúhelníky (vně nebo dovnitř), potom jejich středy (těžiště) T_1 , T_2 , T_3 tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Pro středy rovnostranných trojúhelníků vně trojúhelníku ABC (nepřekrývajících se s ním) se jedná o vnější Napoleonův trojúhelník, v opačném případě (kdy se všechny tři rovnostranné trojúhelníky s ABC překrývají) se jedná o vnitřní Napoleonův trojúhelník.

Napoleonův první bod

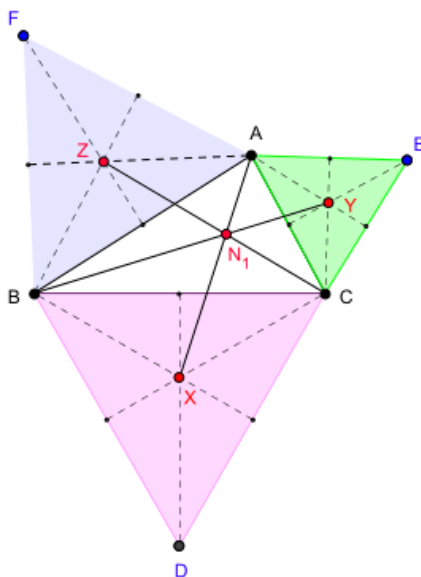
Nechť ABC je libovolný trojúhelník v rovině. Na stranách BC , CA , AB trojúhelníku sestrojíme vnější rovnostranné trojúhelníky DBC , ECA a FAB . Nechť těžiště těchto trojúhelníků jsou X , Y , Z . Poté se přímky AX , BY a CZ protnou v jednom bodě a tento bod N_1 je prvním (neboli vnějším) Napoleonovým bodem trojúhelníku ABC . Trojúhelník XYZ se

nazývá vnější Napoleonův trojúhelník trojúhelníku ABC . Napoleonova věta říká, že tento trojúhelník je rovnostranný.

Napoleonův druhý bod

Nechť ABC je libovolný trojúhelník v rovině. Na stranách BC , CA , AB trojúhelníku sestrojíme vnitřní rovnostranné trojúhelníky DBC , ECA a FAB . Necht' X , Y , Z jsou těžiště těchto trojúhelníků. Potom se přímky AX , BY a CZ protnou v jednom bodě a tento bod N_2 je druhým (nebo vnitřním) Napoleonovým bodem trojúhelníku ABC . Trojúhelník XYZ se nazývá vnitřní Napoleonův trojúhelník trojúhelníku ABC . Napoleonova věta říká, že také tento trojúhelník je rovnostranný.

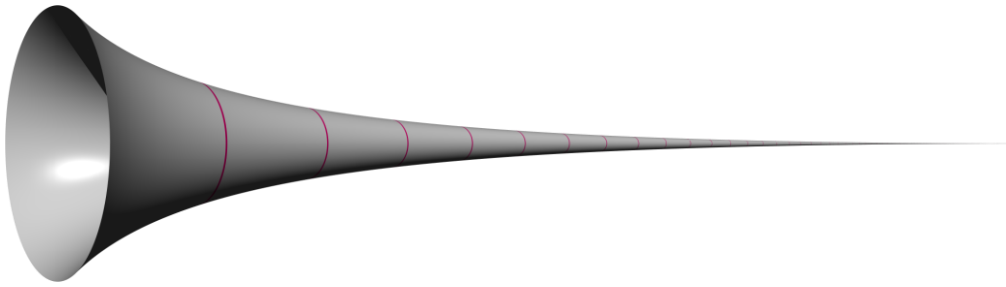
První Napoleonův bod je ilustrován na následujícím obrázku 4:



Obrázek 4 (zdroj [12])

Torricelliho trumpeta

Torricelliho trumpeta (nebo též Gabrielův roh) je geometrický útvar, který má nekonečně velký povrch a přitom má konečný objem. Historický, středověký název Gabrielův roh má navozovat myšlenku na archanděla Gabriela, který na něj bude troubit při oznámení Soudného dne. Vlastnosti tohoto útvaru byly poprvé studovány Evangelistou Torricellim. Jedno jeho vyobrazení je na následujícím obrázku 5:



obrázek 5 (zdroj [9])

Gabrielův roh (Torricelliho trumpeta) je vytvořen rotací grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ pro $x \geq 1$ kolem osy x . I když matematická podstata je v dnešní době studentům běžně známá, v době Torricelliho se jednalo o nesmírně obtížný a těžko pochopitelný problém (v 17. století nebyl k dispozici infinitezimální počet), který doboví matematici řešili zřejmě pomocí Cavalieriho principu.

Nyní z didaktických důvodů připomeneme výpočet objemu a povrchu Gabrielova rohu. Začneme objemem, pro jehož výpočet slouží jednoduchý nevládní integrál. Platí:

$$V = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\pi \int_1^a \frac{dx}{x^2} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\pi \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right] = \pi.$$

Objem Gabrielova rohu je tedy vskutku konečný. Při určení jeho obsahu je však nesnadné postupovat matematicky naprosto přesně, neboť, jak uvidíme, nevládní integrál nutný k výpočtu je velmi obtížný. Využijeme proto nejprve zřejmé nerovnosti, platné pro všechna

kladná reálná čísla: $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$. Platí:

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \left[\left(\frac{1}{x} \right)' \right]^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x};$$

v limitě potom platí $S > \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi [\ln x]_1^a = 2\pi \ln a$. Roste-li parametr a nade

všechny meze, je povrch Torricelliho trumpety opravdu nekonečně velký. Jak již bylo výše uvedeno, problémem pro studenty zůstává přesný výpočet nevládního integrálu

$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$. Postup jeho řešení nyní uvedeme. Pro zjednodušení budeme

nejprve řešit neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx,$$

přičemž při řešení využijeme postupně tři substituce a rozklad na parciální zlomky. Postup jen naznačíme; podrobný výpočet lze přenechat zájemcům jako cvičení.

a) První substituce: $\frac{I}{x^2} = t$. Po dosazení dostaneme integrál $\left(-\frac{I}{2}\right) \int \frac{\sqrt{I+t^2}}{t} dt$.

b) Druhá substituce: $tg u = t$. Po dosazení obdržíme integrál ve tvaru $\left(-\frac{I}{2}\right) \int \frac{I}{\sin u \cdot \cos^2 u} du$.

c) Třetí substituce: $tg \frac{u}{2} = v$. Dosazením získáme integrál $\left(-\frac{I}{2}\right) \int \frac{v^4 + 2v^2 + I}{v \cdot (I-v)^2 \cdot (I+v)^2} dv$.

d) Rozkladem na parciální zlomky přejde poslední z integrálů do tvaru

$$\left(-\frac{I}{2}\right) \int \left[\frac{I}{v} - \frac{I}{(I+v)^2} + \frac{I}{(I-v)^2} \right] dv.$$

Výpočet tohoto integrálu je již snadný, výsledkem je výraz (bez integrační konstanty)

$$\left(-\frac{I}{2}\right) \ln v - \frac{I}{I-v^2}.$$

Po zpětném dosazení všech tří substitucí dostaneme výsledek (bez integrační konstanty)

$$\int \frac{I}{x} \cdot \sqrt{I + \frac{I}{x^4}} dx = \left(-\frac{I}{2}\right) \ln\left(\sqrt{I+x^4} - x^2\right) - \frac{I}{2x^2 \sqrt{I+x^4} - 2x^4}.$$

Poznamenejme, že ani zpětné dosazování není jednoduchou záležitostí a může studentům způsobit řadu technických problémů. Vraťme se nyní k původnímu nevlastnímu integrálu. Platí:

$$S = 2\pi \int_1^\infty \frac{I}{x} \cdot \sqrt{I + \frac{I}{x^4}} dx = 2\pi \left[\left(-\frac{I}{2}\right) \ln\left(\sqrt{I+x^4} - x^2\right) - \frac{I}{2x^2 \sqrt{I+x^4} - 2x^4} \right]_1^\infty.$$

Vyřešením tohoto integrálu pomocí limitních procesů zjistíme, že tento integrál diverguje. Gabrielův roh má tedy skutečně nekonečný povrch.

Dioklova kisoida

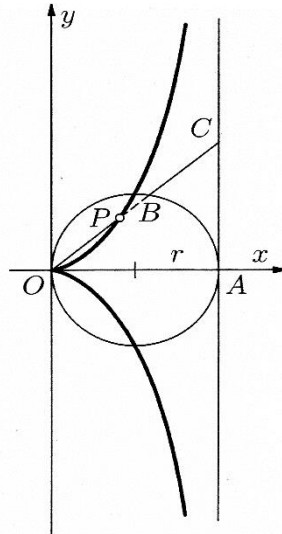
Když byly objeveny vlastnosti Torricelliho trumpet, byla skutečnost, že rotace nekonečně dlouhé křivky okolo osy x generuje objekt konečného objemu, považována za paradoxní. Až později byly podobné paradoxy vysvětleny s rozvojem teorie nekonečných množin a nekonečných řad. Poznamenejme, že zhruba ve stejné době Christian Huygens a François Walther de Sluze objevili rotační těleso s příbuznými vlastnostmi: nekonečně vysoké pevné těleso s konečným objemem, které obepíná nekonečně velkou dutinu. De Sluze tento objekt popsal jako „nádobu k pití, která málo váží, ale kterou ani největší pijan nedokáže vyprázdnit“. Toto těleso vznikne rotací plochy ležící v 1. kvadrantu, ohraničené Dioklovou kisoidou, osou x a přímkou $x = I$, kolem osy y . Dioklova kisoida je křivka, obecně

definovaná vztahem $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ pro $x \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. V našem případě je $a = I$, tzn.

rovnice kisoidy je tvaru $y^2 = \frac{x^3}{I-x}$. Protože tato algebraická křivka je poměrně málo známá,

uvedeme její odvození (viz [2]-Jarešová, Volf 2014, s. 52-53). Sledujme následující obrázek 6.

Základními prvky konstrukce kisoidy jsou kružnice a její tečna v bodě A . Kružnici „umístíme“ v souřadné soustavě tak, že „protilehlou“ tečnou je osa y , která se dotýká kružnice v počátku O a osou x je přímka OA . Pro libovolný bod C na zvolené tečně sestrojíme úsečku OC . Tato úsečka protíná kružnici v bodě B . Na úsečce OC nyní vyznačíme bod P tak, že platí $|OP| = |BC|$. Provedeme-li tuto konstrukci pro všechny body C dané tečny, pak vyznačené body B vytvoří kisoidu.



obrázek 6 (zdroj [2]-Jarešová, Volf 2014, s. 52)

Uvedený postup popíšeme analyticky. Poloměr kružnice označíme r , souřadnice bodů O, P, B, C nechť jsou po řadě $[0, 0], [x, y], [b_1, b_2], [2r, c_2]$, střed kružnice má souřadnice $[r, 0]$, směrnice přímky OC je $\frac{y}{x}$. Bod B leží na přímce OC i na kružnici, pro jeho souřadnice $[b_1, b_2]$ tedy platí soustava rovnic s parametrem r :

$$b_2 = \frac{y}{x} b_1,$$

$$(b_1 - r)^2 + b_2^2 = r^2.$$

Řešením dostaneme $b_1 = \frac{2rx^2}{x^2 + y^2}$, $b_2 = \frac{2rxy}{x^2 + y^2}$. Přímka OC protíná základní tečnu v bodě

C . Dělicí poměr bodů P, B vzhledem k bodům O, C na úsečce OC je roven dělicímu poměru x -ových souřadnic těchto bodů, platí tedy vztah

$$x = 2r - b_1, \text{ tzn. po dosazení za } b_1 \text{ vztah } x = 2r - \frac{2rx^2}{x^2 + y^2}.$$

Položíme-li $a = 2r$, lze poslední vztah upravit do tvaru $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, což je rovnice kisoidy.

Kisoida leží pouze v prvním a čtvrtém kvadrantu, její asymptotou je přímka $x = a$. Je rovněž souměrná podle osy x . Poznamenejme, že v polárních souřadnicích lze vyjádřit rovnici kisoidy ve tvaru

$$r = 2a \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi,$$

její parametrické vyjádření je dáno vztahy

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

Vrátíme-li se k de Sluzeho „nádobě“, pak lze skutečně integrováním zjistit, že obsah plochy ohraničené kisoidou a její asymptotou $x = a$ je roven $S = \frac{3}{4}\pi a^2$, pro $a = 1$ tedy $S = \frac{3}{4}\pi$.

Omezíme-li se na první kvadrant, pak $S = \frac{3}{8}\pi$. Rotací této plochy o konečném obsahu

v prvním kvadrantu kolem osy y pak dostaneme „nádobu“ o konečném objemu, která zřejmě ohraničuje dutinu o nekonečném objemu. Pro úplnost uvedeme i na tomto místě postup při výpočtu potřebného integrálu. Omezíme se na určení plochy ohraničené kisoidou a její asymptotou, která je podmnožinou prvního kvadrantu, rovněž budeme uvažovat případ pro

$a = 1$. Budeme tedy řešit nevlastní integrál $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$. Podobně jako při výpočtu povrchu

Torricelliho trumpety budeme tento integrál nejprve počítat jako neurčitý. Integrál

$\int \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$ nejsnáze vyřešíme pomocí substituce $x = \sin^2 t$. Po dosazení obdržíme integrál

$2 \int \sin^4 t dt$. Nyní s pomocí trigonometrických vztahů

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$

odvodíme vztah $\sin^4 t = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$. Po integraci platí (bez integrační konstanty)

$$2 \int \sin^4 t dt = \frac{3}{4} t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{16} \sin 4t.$$

Při zpětném dosazení substitučního vztahu využijeme vztahů $\sin t = \sqrt{x}$, $t = \arcsin \sqrt{x}$,

$$\sin 2t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}, \quad \sin 4t = 4 \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot (1 - 2 \sin^2 t).$$

Po dosazení a úpravě dostáváme hledaný neurčitý integrál

$$\int \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = \frac{3}{4} \arcsin \sqrt{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \cdot \sqrt{x-x^2}.$$

Nyní lze psát

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = \lim_{k \rightarrow 1} \int_0^k \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = \lim_{k \rightarrow 1} \left[\frac{3}{4} \arcsin \sqrt{x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{x-x^2} \right]_0^k =$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left[\frac{3}{4} \arcsin \sqrt{k} - \left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4} \right) \sqrt{k-k^2} \right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{3}{8} \pi.$$

Tento výsledek odpovídá hodnotě výše uvedené při popisu de Sluzeho „nádoby“.

I když poslední příklad není přímo spojován s Evangelistou Torricellim, vychází z jeho výsledků; Christian Huygens a François Walther de Sluze byli zřejmě inspirováni Torricelliho trumpetou. Problémem pro historiky je otázka, jak určili uvedení učenci vlastnosti popsanych těles bez znalostí integrálního počtu. Závěrem jenom poznamenejme, že kisoida není objevem Torricelliho a jeho současníků. Tuto křivku znali již staří Řekové, kteří ji nazvali kissoidou podle podobnosti s břečťanovým listem (břečťan se řecky nazýval kissos). Kisoidu sestrojil poprvé řecký matematik Diokles, proto se také někdy nazývá dioklova kisoida (viz [2]-Jarešová, Volf 2014).

Závěr

V předchozím textu jsme se zdaleka nevěnovali všem matematickým objevům Giovanni Evangelisty Torricelliho. Zajímavé by např. bylo uvedení původního Torricelliho odvození konstrukce těžiště cykloidy nebo tečny k dané parabole v jejím bodě a srovnání, jak se tyto problémy řeší v současnosti pomocí infinitezimálního počtu. Podstatné je, že zkoumání významných objevů v historii matematiky má ve výuce matematiky svoje nezastupitelné místo, zejména jako motivační faktor a rozvíjení zájmu o její další studium.

Bibliografie

- Burešová, M. (2009). *Umístění logistických center v území jako problém diskrétní lokace*. Diplomová práce. Univerzita Pardubice, fakulta ekonomicko-správní. 61 s. Dostupné z internetového zdroje http://dspace.upce.cz/bitstream/10195/36586/1/BuresovaM_Umisteni%20logistickych_JV_2010.pdf. Citováno dne 19. 8. 2023.
- Jarešová, M, Volf, I. (2014). *Matematika křivek*. Studijní text pro řešitele fyzikální olympiády a ostatní zájemce o fyziku. 64 s. Dostupné z internetového zdroje <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>. Citováno dne 22. 8. 2023.
- Kuchařík, J. (2012). *Některé netradiční vhledy do geometrie*. Soutěžní práce SOČ, gymnázium Jihlava. 81 s. Dostupné z internetového zdroje http://forum.matweb.cz/files/prace/SOC_Nektere_netradicni_vhledy_do_geometrie.pdf. Citováno dne 4. 5. 2013.
- Lebrová, D. (2008). *Giovanni Evangelista Torricelli – italský matematik, fyzik a astronom, vynálezce tlakoměru*. Pozitivní noviny, internetové vydavatelství Loužecký, cz. 3 s. Dostupné z internetového zdroje <http://www.pozitivni-noviny.cz/cz/clanek-2008100032>. Citováno dne 11. 8. 2023.
- Novotný, J. (2002) *Fyzika a její lidé*. In: Sborník X. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky. Velké Meziříčí: Prometheus, s. 14-20. ISBN 80-7196-245-7.

Pech, P. (2004). *Automatické dokazování a objevování vět*. Jihočeská Universita, České Budějovice. 47 s.

Švrček, J., Vanžura, J. (1998). *Geometrie trojúhelníka*. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury. 248 s.

Internetové zdroje:

http://cs.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli.
Citováno dne 23. 8. 2023.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Gabriel%C5%AFv_roh.
Citováno dne 28. 8. 2023.

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:GabrielHorn.png>.
Citováno dne 29. 8. 2023.

https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point.
Citováno dne 29. 8. 2023.

https://cs.wiki7.org/wiki/Точки_Наполеона.
Citováno 6. 9. 2023.

doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Katedra matematiky
Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta
Poříčí 7, 603 00 Brno
Česká republika
beranek@ped.muni.cz